Ueber eine Gleichung 5. Grades der komplexen Multiplikation der elliptischen Modulfunktionen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

vorgelegt von

Hugo Heinis

aus Therwil

BASEL

Basler Druck- und Verlagsanstalt

1911

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546706_0120

Ueber eine Gleichung 5. Grades der komplexen Multiplikation der elliptischen Modulfunktionen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde
der hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

vorgelegt von

Hugo Heinis
aus Therwil

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

BASEL
Basler Druck- und Verlagsanstalt
1911

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. Fueter und Dr. Von der Mühll.

Basel, den 14. November 1911.

John Meier,
Dekan.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit.

Inhaltsangabe.

Einleitung 5

I. Kapitel.

Algebraischer Teil.

§ 1. Auflösung und Diskussion der Gleichung 11

II. Kapitel.

Körper-Basis und Diskriminante.

§ 2. Der Körper $k(\sqrt{-47})$. 27
§ 3. Basis und Diskriminante der Körper $k(A_i)$ 28
§ 4. Basis und Diskriminante des Oberkörpers $K(\sqrt{-47}, A_i)$ 30

III. Kapitel.

Relative Körpereigenschaften.

§ 5. Relative Diskriminante und Differente des Oberkörpers $K(\sqrt{-47}, A_i)$ bezogen auf $k(\sqrt{-47})$ 33
§ 6. Zerlegung der Primzahlen 36

IV. Kapitel.

Klassenzahl und Einheiten.

§ 7. Der Ausdruck für die Anzahl der Idealklassen von $K(\sqrt{-47}, A_i)$ 40
§ 8. Halbierung von Argumenten ω der η-Funktion. . . . 46
§ 9. Dreiteilung von Argumenten ω der η-Funktion. . . . 50
§ 10. Die Grundeinheiten u. die Klassenzahl von $K(\sqrt{-47}, A_i)$ 60
§ 11. Die Grundeinheiten der Körper $k(A_i)$. 76
§ 12. Ergänzungen 76

Curriculum vitae 79

Einleitung.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Gleichung 5. Grades $x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$, und ihre Lösung wird das erste Ziel bilden. Es sei vorausgenommen, dass sie algebraisch lösbar ist und sich sogar unter die einfacheren ihrer Art einreiht. Die Algebra wird somit die Schwierigkeiten so leicht überwinden, dass es sich fragt, ob ein solches Thema sich zu eingehender Behandlung eignet. Wir lassen aber dann die Zahlentheorie eingreifen und werden an diesem, man dürfte es fast ein triviales Beispiel heissen, erkennen, welchen Reichtum an Wahrheiten sie mit ihren neueren Hilfsmitteln aus der scheinbar versiegten Quelle zu schöpfen weiss.

Der einheitlichen Darstellung willen möge die Bedeutung der öfters hier auftretenden Begriffe vorausgeschickt werden.

Es heisst jede Grösse α, die einer Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots a_n = 0$$

mit rationalen Koeffizienten genügt, eine algebraische Zahl und falls die Koeffizienten ganz, eine ganze algebraische oder kurz ganze Zahl. Es liegt nahe, für dieses α einen ähnlichen Bereich zu schaffen, wie er uns in der Gesamtheit der rationalen Zahlen gegeben ist. Hierzu denken wir uns alle seine unendlich vielen rationalen Funktionen mit ebensolchen Koeffizienten gebildet; dann können die 4 Grundoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division keine neuen Zahlen mehr erzeugen, und wir sind so in der Tat zu einem in sich abgeschlossenen Systeme von algebraischen Zahlen gelangt, das Zahlbereich, Bereich, treffender Zahlkörper oder einfach Körper heissen soll. Die einzige Grösse α reichte hin, das System festzulegen; es ist eine den Körper bestimmende Zahl. Aber dieses α findet sich immer in den allgemein schwer zugänglichen Komplexen von Grössen,

die als Wurzeln einer irreduziblen Gleichung bekannt sind, und das wird auf den Körper selbst, wie auf die Gesamtheit der aus dem Komplexe Hervorgegangenen, nicht ohne Einfluss bleiben. Man nennt daher solche Körper, wie die sie bestimmenden Zahlen, zu einander konjugiert, und wenn ihre Anzahl oder der Grad der Gleichung, der sie genügen, n ist, heisst man den Körper vom n. Grade. Ich will für ihn fortan das Symbol k gebrauchen. In k ist $f(x)$ reduzibel, indem nach seiner Division durch $(x - \alpha)$ ein Faktor $(n - 1)$. Grades entsteht, dessen Koeffizienten Zahlen aus diesem Körper darstellen. Die Irreduzibilität ist also in unserem Definitionsbereich zu einer relativen Eigenschaft geworden und wir haben im Körper wenigstens theoretisch ein wirksames Mittel gefunden, solche Komplexe zu lösen. Zu ähnlichen Verbänden wird man offenbar gelangen, wenn in den rationalen Funktionen von α mit rationalen Koeffizienten — als solche wurde ja oben jedes Zahlindividuum aus k erhalten — die Potenzen von α der Reihe nach durch die der übrigen Wurzeln ersetzt werden. Es entstehen dadurch Zahlen aus dem jeweiligen Körper, die ebenfalls eine Gleichung n. Grades, deren Koeffizienten rational sind, befriedigen. Damit ist aber keineswegs die Irreduzibilität notwendig verbunden; denn es kann sehr wohl möglich sein, dass sich diese in mehrere irreduzible Faktoren zerspalten lässt, deren Koeffizienten dem Bereiche der rationalen Zahlen angehören. Fassen wir nun die neue Grösse als Wurzel eines solchen Faktors ins Auge, so werden wir auch mit ihr einen Körper konstruieren können, der aber, obgleich vollständig von k eingeschlossen, doch nicht mit ihm identisch wird. Wir haben also hier zu unterscheiden zwischen Ober- und Unterkörper. Zunächst dürfte die Frage nach dem innern Zusammenhange dieser beiden Zahlbereiche interessieren, wozu ich auf Webers Lehrbuch der Algebra[1]) verweise, in welchem sich die Körpertheorie in aller Strenge durchgeführt findet.

Damit ist der einfachste Fall, einen Körper zu konstruieren, im Prinzip erledigt. Es weist dies sofort auf die ganz allgemeine Fragestellung hin: Gegeben eine endliche Menge von algebraischen Zahlen, gesucht der kleinste sie umschliessende Körper. Ihre Beantwortung führt auf einen Körper des vorigen Typus. So war also unser erst

[1]) H. Weber, Lehrbuch der Algebra (Braunschweig, Vieweg & Sohn. Bd. I, II 1898, Bd. III 1908). Dieses Werk wird im weiteren Verlaufe noch öfters zitiert und mit Weber I, II, III bezeichnet.

geschaffener Bereich schon ganz allgemeiner Natur und unter ihnen allen hat sich einer für die Untersuchung als besonders günstig erwiesen. Es ist derjenige, welcher als kleinster alle Wurzeln obiger Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$$

umschliesst; man benennt ihn allgemein nach dem jung verstorbenen französischen Mathematiker Galois, der zuerst seine Bedeutung gezeigt hat.

Auf dieser Grundlage hat die geniale Schöpfung Kummers der Idealzahlen, die von Dedekind zum Begriffe Ideal erweitert wurden, dem Studium der ganzen Zahl die Wege vorgezeichnet. Sie haben sich von solch eminenter Tragweite erwiesen, dass wir ihre Definition wohl wiederholen dürfen: Ein System von unendlich vielen algebraischen Zahlen α_1, α_2, ... des Körpers k, welches die Eigenschaft besitzt, dass eine jede lineare Kombination $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots\ldots$ derselben wiederum dem System angehört, heisst ein Ideal $\mathfrak{a}$; dabei bedeuten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ ganze algebraische Zahlen des Körpers k. Der Zahlbereich wird dadurch um ganz bedeutendes erweitert, aber, und gerade darauf beruht ihre Wichtigkeit, die Zerlegung der neu geschaffenen Zahlen ist eine eindeutige, wenn man von Einheitsfaktoren absieht, und die Theorie der ganzen Zahlen verwandelt sich in eine Idealtheorie.

Man wird zuerst suchen, diese regellos gelagerte Menge neuer Zahltypen zu ordnen. Das nächstliegende Mittel dazu bildet wohl der folgende Begriff: Man nennt zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, für die

$$\alpha \,.\, \mathfrak{a} = \beta \,.\, \mathfrak{b},$$

wo α und β ganze Zahlen aus k andeuten sollen, einander aequivalent. Fassen wir also die dem Ideale $\mathfrak{a}$ äquivalenten in eine Klasse zusammen, nehmen aus den übrig bleibenden ein beliebiges heraus, vereinigen alle diesem äquivalenten zu einer neuen Klasse, so fortfahrend, werden wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten sämtliche Ideale eindeutig in Klassen geordnet haben. Diese Entwicklungen haben in Hilberts Theorie der algebraischen Zahlkörper[1]) ihre klassische Darstellung gefunden, auf welche hier besonders verwiesen sei.

[1]) D. Hilbert: Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutsch. Mathem. Vereinig. IV. (1894–95) S. 175. Man beachte am Schlusse dieses Werkes das ausführliche Literaturverzeichnis. Diese Quelle wird im folgenden kurz als Zahlbericht bezeichnet.

Es lässt sich doch immerhin die Frage aufwerfen, ob die ideellen Zahlen nicht auch durch wirkliche repräsentiert werden können? Furtwängler[1]) vermochte dies allgemein zu bejahen, indem es ihm gelang zu beweisen, dass zu einem jeden Körper ein gewisser Oberkörper existiert, in welchem alle Ideale des Unterkörpers zu Hauptidealen, also zu wirklichen Zahlen werden. Wegen der engen Beziehungen eines solchen Oberkörpers zu den Klassen des betreffenden Grundkörpers, wird er als Klassenkörper[2]) bezeichnet; ihn wirklich rechnerisch anzugeben ist noch eine offene Frage, die nur für den Fall, dass der Unterkörper quadratisch imaginär ist, seine volle Erledigung gefunden hat durch die Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen[3]). Es hat sich gezeigt, dass die dort auftretende absolute Invariante $j(\omega)$ ganze algebraische Zahlen erzeugt, solange ω gewisse singuläre Werte durchläuft, die als Wurzeln mit positivem Imaginärteil quadratischer Formen

$$A\,x^2 + B\,x + C$$

(A, B, C ganz und rational) definiert sind, deren Diskriminante negativ ist. Allein die entstehenden Invariantenwerte fallen bei gleicher Diskriminante nur in endlicher Anzahl von einander verschieden aus und genügen ein und derselben im Bereiche der rationalen Zahlen irreduziblen Gleichung, deren Grad eben der Anzahl Klassen unseres speziellen Bereiches $k(\sqrt{-m})$ gleichkommt. Dieses Übereinstimmen von Klassenzahl und Grad hat darin seine gemeinsame Wurzel, dass die genannte Gleichung den Klassenkörper zu $k(\sqrt{-m})$ liefert. Bei diesen höchst interessanten Untersuchungen ergab sich noch ein weit tieferer Zusammenhang zwischen Algebra, Zahlen- und Funktionentheorie, der in der Vollständigkeit gewisser Körperarten sich ausspricht und in dem von Fueter[4]) bewiesenen Satze gipfelt: Die durch die komplexe Multiplikation gelieferten Gleichungen bestimmen mitsamt den Kreisteilungsgleichungen alle im Bereiche des quadratisch Imaginären relativ-Abelschen Zahlkörper; eine Wahrheit, die schon längst

[1]) Furtwängler, Mathem. Annalen Bd. 63, S. 1–37.
[2]) Hilbert: Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. Gött. Nachrichten (1898) S. 370.
[3]) Weber III.
[4]) R. Fueter: Die Theorie der Zahlstrahlen. Journal für Mathematik, Bd. 132 (1907), S. 255, 267.

vorher von Kronecker[1]) erkannt und vermutungsweise ausgesprochen wurde; war es doch nur die natürliche Erweiterung des Kummerschen Satzes[2]): Jeder Abelsche Zahlkörper im Bereiche der rationalen Zahlen ist ein Kreiskörper. Diese Theorie ist heute zu einem gewissen Abschlusse gebracht und „leider" wie Fueter[3]) in seinem Berichte zur Feier des 100. Geburtstages Kummers schreibt, „noch an wenig Beispielen erläutert". Der vorliegende Aufsatz will dies versuchen, indem er sich über die gewöhnlich behandelten Fälle 2. 3. und 4. Grades hinauswagt.

Die Gleichung $x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$ entstammt der komplexen Multiplikation[4]) und entsteht aus singulären Werten ω der Diskriminante -47. Sie wird am einfachsten nicht aus der schwer zu berechnenden Invarianten $j(\omega)$ selbst, sondern wie manch andere aus der von ihr abgeleiteten Klasseninvarianten $f(\omega)$ mit Hilfe der irrationalen Formen der Modulargleichungen[5]) erhalten.

Ich habe die Arbeit, der die beiden obgenannten fundamentalen Werke: Webers Lehrbuch der Algebra und Hilberts Zahlbericht, zur Grundlage dienten, in 4 Kapitel eingeteilt. Das erste ist der algebraischen Auflösung der Gleichung gewidmet. Hierzu benütze ich die numerisch berechneten Wurzelgrössen und erhalte so nicht bloss eine algebraische Darstellung ihrer Wurzeln, sondern auch der Wurzeln unter sich, d. h. die Substitutionen, was für das Folgende wichtig ist.

Im 2. Kapitel untersuche ich die verschiedenen aus der Gleichung 5. Grades fliessenden Körper auf ihre Diskriminante und bestimme die Basiszahlen.

In § 5 von Kapitel III wird nach besonderer Methode, wie sie beim Existenzbeweis der Klassenkörper von Furtwängler zur Anwendung gelangt, die relative Diskriminante des Oberkörpers $K(A_0, \ldots A_4)$ [$A_0 \ldots A_4$ bedeuten die Wurzeln unserer Gleichung] in bezug auf $k(\sqrt{-47})$ ausgewertet, woraus dann unmittelbar der Wert für die bezügl. Relativdifferente folgt. § 6 gibt die Zerlegung der Primzahlen an.

[1]) Vergl. etwa Fueter: l. c. Bd. 130, S. 208.

[2]) Zahlbericht S. 339.

[3]) R. Fueter: Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluss auf die Entwicklung der Zahlentheorie. Jahresbericht der Deutsch. Mathematiker-Vereinigung, Bd. 20, S. 1—40. Man beachte hier die reichhaltige Quellenangabe.

[4]) Weber III, S. 486.

[5]) Weber III, S. 270, 462.

Auf Kapitel IV wird das Hauptgewicht gelegt. Es wird hier zum ersten Mal die Klassenanzahl H von K nach der von Fueter neulich angegebenen Formel[1])

$$H = l \cdot \frac{W}{2R} H \sum^{(a)} [a] \, lg \frac{\sqrt{A}}{\eta(\omega) \cdot \eta(\omega')}$$

berechnet. §§ 7—9 liefern den Wert des Produktes H, §§ 10—12 den von R, [R = Regulator], wozu eine Voruntersuchung über Grundeinheiten, die somit ebenfalls für unsern Körper aufgestellt sind, nötig ist.

[1]) Vergl. die bezügl. Literaturangabe Kap. IV.

Erstes Kapitel.

Diskussion und Auflösung der Gleichung.

§ 1.

Die Diskriminante der Gleichung

$$x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad \text{I}$$

— I möge im folgenden die Hauptgleichung heissen — hat den Wert 47^2. Als Rationalitätsbereich gelte der quadrat. imaginäre Körper $k(\sqrt{-47})$: denn hierin soll I Abelsch[1]) sein, also einfachere Gruppeneigenschaften besitzen wie im Bereiche der rationalen Zahlen, auf Grund derer sich die Auflösung leichter bewerkstelligen lässt. Zwar wird sich zeigen, dass die Hauptgleichung im neuen Grundkörper noch irreduzibel bleibt, aber ihre Galoissche Gruppe[2]) reduziert sich auf die möglichst einfache, auf die zyklische[3]), und mittels der Lagrange'schen Resolventen[4]) werden sich die Wurzeln berechnen lassen, falls die zyklischen Funktionen dieser letzteren bekannt sind. Den Kernpunkt dieses Abschnittes wird also die praktische Bestimmung dieser bilden.

Statt deduktiv aus I die zur Auflösung nötigen Eigenschaften zu erhalten, gehen wir der Kürze wegen von der Annahme aus, die Galoissche Gruppe unserer Gleichung sei in $k(\sqrt{-47})$ zyklisch, also wie letztere vom Grade 5. Daraus folgt einerseits, dass die Hauptgleichung ihre eigene Galoissche Resolvente und somit eine Normalgleichung[5]) in $k(\sqrt{\quad 17})$ darstellt, d. h. eine jede ihrer Wurzeln lässt sich rational in k durch eine jede der andern ausdrücken, anderseits, dass I sich in die Klasse der metazyklischen Gleichungen[6]) einordnet und kann daher entweder nur eine oder muss alles reelle Wurzeln besitzen. Übrigens lässt sich mit Hilfe des Sturmschen

[1]) Weber I, S. 576. [2]) Weber I, S. 517. [3]) Weber I, S. 581. [4]) Weber I, S. 584. [5]) Weber I, S. 508. [6]) Weber I, S. 669.

Theorems leicht nachweisen, dass I in der Tat eine reelle und damit 2 Paare conjugiert imaginäre Wurzeln besitzt, eine Tatsache, die wie die obigen ihre Bestätigung in den algebraischen Ausdrücken der Nullwerte von I finden wird.

Sei A eine beliebige unter den Wurzeln der Hauptgleichung, so gestatten die übrigen A', A'', A''', A'''' die Darstellung

$$
\begin{aligned}
A &= \Theta_0(A) = A \\
A' &= \Theta_1(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4 + \\
&\qquad + \sqrt{-47}\,(b_0 + b_1 A + b_2 A^2 + b_3 A^3 + b_4 A^4) \\
A'' &= \Theta_2(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4 - \\
&\qquad - \sqrt{-47}\,(b_0 + b_1 A + b_2 A^2 + b_3 A^3 + b_4 A^4) \\
A''' &= \Theta_3(A) = c_0 + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + c_4 A^4 + \\
&\qquad + \sqrt{-47}\,(d_0 + d_1 A + d_2 A^2 + d_3 A^3 + d_4 A^4) \\
A'''' &= \Theta_4(A) = c_0 + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + c_4 A^4 - \\
&\qquad - \sqrt{-47}\,(d_0 + d_1 A + d_2 A^2 + d_3 A^3 + d_4 A^4),
\end{aligned}
\qquad \text{II}
$$

worin die a, b, c, d rationale Zahlen bedeuten.

Dies eine erste Konsequenz aus der alleinigen Annahme über I, der die zweite nicht minder wichtige, dass sich die A's zyklisch[1]) anordnen lassen, zur Seite steht. Es sei eine solche Anordnung, wenn wir nunmehr die Wurzeln mit $A_0 \ldots A_4$, bezeichnen, gerade

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,$$

und weil die zyklischen Gleichungen als spezieller Fall unter den Abelschen enthalten sind, unterliegen die Substitutionen Θ in II dem kommutativem Gesetze, demzufolge

$$
\begin{gathered}
A_k = \Theta_i(A_0),\quad A_{k+1} = \Theta_i(A_1),\quad A_{k+2} = \Theta_i(A_2),\quad A_{k+3} = \Theta_i(A_3), \\
A_{k+4} = \Theta_i(A_4) \qquad (1)
\end{gathered}
$$

wieder die zyklisch sich folgenden obigen Wurzeln sind, wenn i einer der Werte von $0 \ldots 4$ annimmt und für $k + l$ die aus dem vollen Restsystem nach dem Modul 5 absolut kleinste Zahl genommen wird. k ist durch i bestimmt; denn nach Festlegung der Werte für die a, b, c, d ist die Darstellung II eine eindeutige[2]).

[1]) Weber I, S. 581. [2]) Weber I, S. 489.

Mit den $A's$ werden sich offenbar auch die $\Theta's$ in eine gewisse zyklische Reihe bringen lassen. Sei etwa

$$\Theta_0, \Theta_1', \Theta_2', \Theta_3', \Theta_4'$$

diese Folge, so müssen bei Einsetzung ein und derselben Wurzel A, sich alle zyklisch reproduzieren; d. h.

$$\begin{aligned} A_k = \Theta_0(A_k), \quad A_{k+1} = \Theta_1'(A_k), \quad A_{k+2} = \Theta_2'(A_k), \\ A_{k+3} = \Theta_3'(A_k), \quad A_{k+4} = \Theta_4'(A_k), \end{aligned} \tag{2}$$

wenn k ein beliebiger der Werte von $0....4$ und, wie oben, statt $k + l$ die aus dem vollen Restsystem modulo 5 absolut kleinste Zahl genommen wird.

Um die gesuchte Reihenfolge der $\Theta's$ zu finden, setzen wir $\Theta_1' = \Theta_1$. Es ist dies erlaubt, da über die a, b, c, d noch keine Festsetzung getroffen wurde. Wir fragen: Wie reiht sich dann das zu Θ_1 konjugiert komplexe unter die Θ_0, $\Theta_1'....\Theta_4'$ ein?

Nach II sind Θ_1 und Θ_2 gegeben in der Form

$$\begin{aligned} \Theta_1(A) &= \varphi(A) + i\,\psi(A) \\ \Theta_2(A) &= \varphi(A) - i\,\psi(A) \qquad\qquad i = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

und weil die Gruppe von I Abelsch angenommen wurde:

$$\Theta_1\Big(\Theta_2(A)\Big) = \Theta_2\Big(\Theta_1(A)\Big)$$

oder nach Substitution obiger Werte

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\varphi(A) - i\,\psi(A)\Big) + i\,\psi\Big(\varphi(A) - i\,\psi(A)\Big) = \\ = \varphi\Big(\varphi(A) + i\,\psi(A)\Big) - i\,\psi\Big(\varphi(A) + i\,\psi(A)\Big). \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für eine beliebige der Grössen A, also auch für die reelle und drückt aus, dass sich der imaginäre Teil für positive und negative Werte nicht ändert, dass er verschwindet. Indes bedeutet der Ausdruck $\Theta_1(\Theta_2(A))$ aber wieder eine der Wurzeln von I, und ist A die reelle, so

$$\Theta_1\Big(\Theta_2(A)\Big) = A,$$

was doch offenbar nichts anderes besagt, als dass die zusammengesetzte Substitution $\Theta_1 \Theta_2$ die Einheitssubstitution darstellt. Da aber anderseits erst die 5-malige Anwendung von Θ_1 zur Einheitssubstitution führt, muss Θ_2 mit der 4-maligen Anwendung von Θ_1 übereinstimmen; d. h.

$$\Theta_2 = \Theta_4'.$$

Aus dem nämlichen Grunde wie oben bei Θ_1 lässt sich festsetzen

$$\Theta_3 = \Theta_2',$$

so dass für Θ_4 nur die Relation $\Theta_4 = \Theta_3'$ gelten kann; womit die zyklische Anordnung der $\Theta's$ gewonnen ist:

$$\Theta_0,\ \Theta_1,\ \Theta_3,\ \Theta_4,\ \Theta_2.\ ^1) \qquad (2^a)$$

Die nächste Aufgabe wird sein, die a, b, c, d zu berechnen, oder die 20 hierzu nötigen Bedingungsgleichungen aufzustellen. 4 solche liefern die Relationen

$$\begin{array}{llll} A_1 = \Theta_1(A_0) & A_2 = \Theta_3(A_0) & A_3 = \Theta_4(A_0) & A_4 = \Theta_2(A_0) \\ A_2 = \Theta_1(A_1) & A_3 = \Theta_3(A_1) & A_4 = \Theta_4(A_1) & A_0 = \Theta_2(A_0) \\ A_3 = \Theta_1(A_2) & A_4 = \Theta_3(A_2) & A_0 = \Theta_4(A_2) & A_1 = \Theta_2(A_0) \\ A_4 = \Theta_1(A_3) & A_0 = \Theta_3(A_3) & A_1 = \Theta_4(A_3) & A_2 = \Theta_2(A_0) \\ A_0 = \Theta_1(A_4) & A_1 = \Theta_3(A_4) & A_2 = \Theta_4(A_4) & A_3 = \Theta_2(A_4). \end{array} \qquad \text{III}$$

Ihre Richtigkeit folgt aus (1) und (2), indem, wie bereits dargetan, $\Theta_1' = \Theta_1$, $\Theta_2' = \Theta_3$, $\Theta_3' = \Theta_4$, $\Theta_4' = \Theta_2$. Bildet man die Summe der Vertikal-Kolonnen in III, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{4} A_i = \Sigma\Theta_1(A_i) &= 5a_0 + a_1\Sigma A_i + a_2\Sigma A_i^2 + a_3\Sigma A_i^3 + a_4\Sigma A_i^4 + \\ &+ \sqrt{-47}\,(5b_0 + b_1\Sigma A_i + b_2\Sigma A_i^2 + b_3\Sigma A_i^3 + b_4\Sigma A_i^4) \\ \sum_{i=0}^{4} A_i = \Sigma\Theta_3(A_i) &= 5c_0 + c_1\Sigma A_i + c_2\Sigma A_i^2 + c_3\Sigma A_i^3 + c_4\Sigma A_i^4 + \\ &+ \sqrt{-47}\,(5d_0 + d_1\Sigma A_i + d_2\Sigma A_i^2 + d_3\Sigma A_i^3 + d_4\Sigma A_i^4) \\ \sum_{i=0}^{4} A_i = \Sigma\Theta_4(A_i) &= 5c_0 + c_1\Sigma A_i + c_2\Sigma A_i^2 + c_3\Sigma A_i^3 + c_4\Sigma A_i^4 - \\ &- \sqrt{-47}\,(5d_0 + d_1\Sigma A_i + d_2\Sigma A_i^2 + d_3\Sigma A_i^3 + d_4\Sigma A_i^4) \\ \sum_{i=0}^{4} A_i = \Sigma\Theta_2(A_i) &= 5a_0 + a_1\Sigma A_i + a_2\Sigma A_i^2 + a_3\Sigma A_i^3 + a_4\Sigma A_i^4 - \\ &- \sqrt{-47}\,(5b_0 + b_1\Sigma A_i + b_2\Sigma A_i^2 + b_3\Sigma A_i^3 + b_4\Sigma A_i^4). \end{aligned} \qquad \text{IV}$$

[1]) Der eigenartigen Verschiebung der Indices in dieser Reihe werden wir später in Kapitel II unser Interesse zuwenden.

Bezeichnet s_i die $i$te Potenzsumme der A's, die sich rational durch die Koeffizienten von I ausdrücken lässt, so folgen aus den letzten 4 Gleichungen 2 verschiedene Bedingungen, welche sich infolge der komplexen Natur der rechten Seite je in 2 spalten:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 \\ o &= b_0 s_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 + b_4 s_4 \\ s_1 &= c_0 s_0 + c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4 \\ o &= d_0 s_0 + d_1 s_1 + d_2 s_2 + d_3 s_3 + d_4 s_4 \end{aligned}$$

oder in unserem Falle:

$$\begin{aligned} o &= a_0.5 + a_1.0 + a_2.2 + a_3.6 + a_4.10 \\ o &= b_0.5 + b_1.0 + b_2.2 + b_3.6 + b_4.10 \\ o &= c_0.5 + c_1.0 + c_2.2 + c_3.6 + c_4.10 \\ o &= d_0.5 + d_1.0 + d_2.2 + d_3.6 + d_4.10. \end{aligned} \qquad (3)$$

Um zu weiteren Relationen zwischen den a, b, c, d zu gelangen, reichen die symmetrischen Funktionen nicht mehr aus. Erst solche, die bei den zyklischen Substitutionen der A's ungeändert bleiben, die zyklischen Funktionen, liefern neue Bedingungen, so die Summen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{4} A_i A_{i+1} &= \sum_{i=0}^{4} \theta_1(A_i) A_i \\ \sum_{i=0}^{4} A_i A_{i+2} &= \sum_{i=0}^{4} \theta_3(A_i) A_i \\ \sum_{i=0}^{4} A_i A_{i+3} &= \sum_{i=0}^{4} \theta_4(A_i) A_i \\ \sum_{i=0}^{4} A_i A_{i+4} &= \sum_{i=0}^{4} \theta_2(A_i) A_i, \end{aligned} \qquad \text{V}$$

wenn statt $i + k$ die aus dem vollen Restsystem des Moduls 5 absolut kleinste Zahl genommen wird, was für die folgenden Gleichungen ebenfalls gelten soll. Sie ergeben sich durch Multiplikation der $i$ten Horizontalreihe in III mit A_{i-1}, i genommen von 1 bis 5, und Addition der neuen Vertikalreihen. Wegen der zyklischen Beschaffenheit von I in bezug auf $k(\sqrt{-47})$, sind die Werte der zyklischen Funktionen von A Zahlen in k und zwar ganze Zahlen, wenn diese Funktionen, wie die linken Summen in V ganze Zahlen in K $(A_0 \ldots\ldots A_4)$ darstellen, da k ein Unterkörper ist von K.

Zwischen den linken Seiten in V bestehen die Identitäten

$$\sum_{i=0}^{4} A_i A_{i+2} \qquad \sum_{i=0}^{4} A_i A_{i+4}$$
$$\sum_{i=0}^{4} A_i A_{i+1} \qquad \sum_{i=0}^{4} A_i A_{i+3};$$

in den rechten kommen, wie aus IV zu ersehen ist, nebst den a, b, c, d nur die Potenzsummen s_i vor. Das führt auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} &s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 + s_4 a_3 + s_5 a_4 + \\ &\quad + \sqrt{-47}\,(s_1 b_0 + s_2 b_1 + s_3 b_2 + s_4 b_3 + s_5 b_4) \\ &= s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 + s_4 a_3 + s_5 a_4 - \\ &\quad - \sqrt{-47}\,(s_1 b_0 + s_2 b_1 + s_3 b_2 + s_4 b_3 + s_5 b_4) \\ &s_1 c_0 + s_2 c_1 + s_3 c_2 + s_4 c_3 + s_5 c_4 + \\ &\quad + \sqrt{-47}\,(s_1 d_0 + s_2 d_1 + s_3 d_2 + s_4 d_3 + s_5 d_4) \\ &= s_1 c_0 + s_2 c_1 + s_3 c_2 + s_4 c_3 + s_5 c_4 - \\ &\quad - \sqrt{-47}\,(s_1 d_0 + s_2 d_1 + s_3 d_2 + s_4 d_3 + s_5 d_4), \end{aligned}$$

die nur bestehen können, wenn

$$\begin{aligned} s_1 b_0 + s_2 b_1 + s_3 b_2 + s_4 b_3 + s_5 b_4 &= 0 \\ s_1 d_0 + s_2 d_1 + s_3 d_2 + s_4 d_3 + s_5 d_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Funktionen $\sum_{1=i}^{4} A^i A_{i+1}$ und $\sum_{i=0}^{4} A_i A_{i+2}$ haben also reellen Wert und sind somit ganze rationale Zahlen. Sie sind aber noch nicht eindeutig bestimmt; denn eine jede der Folgen

$$A_0, A_1 \qquad A_0, A_2 \qquad A_0, A_3 \qquad A_0, A_4$$

gibt Anlass zu einer zyklischen Anordnung der $A's$ und genügt infolgedessen unsern bis anhin gestellten Bedingungen. Diese 4-Deutigkeit ist in (3) wegen der dort herrschenden Symmetrie nicht hervorgetreten. Um Eindeutigkeit zu erlangen, d. h. lineare Bedingungsgleichungen für die a, b, c, d aufstellen zu können ist es also nötig, eine dieser zyklischen Folgen herauszugreifen. Dazu benützen wir die nummerisch gefundenen Wurzelwerte:

$$\begin{aligned} A &= 1{,}73469\ldots. \\ A' &= -0{,}70123\ldots. + i\cdot 0{,}37778\ldots. \\ A'' &= -0{,}70123\ldots. - i\cdot 0{,}37778\ldots. \\ A''' &= -0{,}16617\ldots. + i\cdot 0{,}93876\ldots. \\ A'''' &= -0{,}16617\ldots. - i\cdot 0{,}93876\ldots., \end{aligned} \qquad \text{VI}$$

die dem Rechnenden ja stetsfort zur Kontrolle der algebraisch erhaltenen Funktionswerte der A's dienen und setzen fest, dass

$$A = A_0$$
$$A' = A_1,$$

d. h. A' soll zyklisch auf die reelle Wurzel folgen, womit die zyklische Folge der A, $A' \cdots A''''$ festgelegt ist. Wie aus der bezügl. Folge der Θ's zu ersehen, wird

$$A'' = A_4,$$

und wir haben nur mehr zwischen den beiden Fällen von Anordnungen

$$A,\ A',\ A''',\ A'''',\ A'' \qquad a)$$
$$A,\ A',\ A'''',\ A''',\ A'' \qquad b)$$

zu entscheiden. Hierzu dient das oben gefundene Resultat, dass die Summe $\sum_{l=0}^{1} A_l\, A_{l+1}$ eine ganze rationale Zahl liefert, welcher Ausdruck sich aber mittels den in VI aufgestellten Werten je nach Folge *a*) oder *b*) näherungsweise bestimmen lässt:

$$\begin{aligned} A\,A' + A'\,A''' + A'''\,A'''' + A''''\,A'' + A''\,A &= -2{,}0002 + \varepsilon_1 \\ A\,A' + A'\,A'''' + A''''\,A''' + A'''\,A'' + A''\,A &= 0{,}5818 + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

wo die Korrektionsgrössen ε_1 und ε_2 absolut den Wert $\frac{1}{1000}$ nicht erreichen. Diese Auswertung zeigt augenscheinlich, dass

$$A\,A'\,A'''\,A''''\,A''$$

die gesuchte Reihenfolge darstellt, und nach den getroffenen Festsetzungen ist

$$A_0 = A \qquad A_1 = A' \qquad A_2 = A''' \qquad A_3 = A'''' \qquad A_4 = A''.$$

Hierdurch wurde ermöglicht, jede zyklische Funktion der A's eindeutig und beliebig genau zu berechnen. Fügt man noch die Ein-

schränkung hinzu, dass diese Funktionen in $K(A_0 \cdots A_4)$ ganze Zahlen darstellen sollen, ihre Werte also ganze Zahlen aus $k(\sqrt{\quad 17})$ ergeben, so lässt sich ohne besondere Limes-Betrachtungen ihr genauer Wert angeben. Es ist dies die der approximativ bestimmten nächst gelegene ganze Zahl.

Die folgenden Berechnungen wurden mit sechsstelligen Logarithmen-Tafeln ausgeführt, so dass die Korrektionswerte ε, für Grössen wie sie hier in Betracht kommen, kleiner als $\frac{1}{1000}$ ausfallen, eigentlich eine überflüssige Genauigkeit, die aber um so deutlicher die Richtigkeit des oben Gesagten hervorhebt. So erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma A_i A_{i+1} &= -2{,}0002 + \varepsilon_1 \\ \Sigma A_i A_{i+2} &= \quad 1{,}0000 + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

und die genauen Werte lauten

$$\begin{aligned} \Sigma A_i A_{i+1} &= -2 \\ \Sigma A_i A_{i+2} &= \quad 1. \end{aligned}$$

Sie führen nach Substitution in V zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} -2 = \sum_{i=0}^{4} \Theta_1(A_i) A_i &= s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 + s_1 a_3 + s_5 a_4 + \\ &+ \sqrt{-47}\,(s_1 b_0 + s_2 b_1 + s_3 b_2 + s_1 b_3 + s_5 b_4) \\ 1 = \sum_{i=0}^{4} \Theta_3(A_i) A_i &= s_1 c_0 + s_2 c_1 + s_3 c_2 + s_4 c_3 + s_5 c_4 + \\ &+ \sqrt{-47}\,(s_1 d_0 + s_2 d_1 + s_3 d_2 + s_4 d_3 + s_5 d_4), \end{aligned}$$

die ihrerseits wegen der reellen und imaginären Bestandteile sich je wieder in 2 spalten und so für die a, b, c, d 4 weitere Bedingungen erzeugen:

$$\begin{aligned} -2 &= 0.a_0 + 2\,a_1 + 6\,a_2 + 10\,a_3 + 15\,a_4 \\ 0 &= 0.b_0 + 2\,b_1 + 6\,b_2 + 10\,b_3 + 15\,b_4 \\ 1 &= 0.c_0 + 2\,c_1 + 6\,c_2 + 10\,c_3 + 15\,c_4 \qquad (4) \\ 0 &= 0.d_0 + 2\,d_1 + 6\,d_2 + 10\,d_3 + 15\,d_4. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise wie (4) folgen die 3.4 noch nötigen linearen Relationen aus den Darstellungen III. Durch Multiplikation der $i.$ Horizontalreihe bezw. mit A^2_{i-1}, A^3_{i-1}, A^4_{i-1} $(i = 0 \ldots 5)$ und Summation, der so erhaltenen Vertikalkolonnen entstehen die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^2 A_{i+1} = \sum_{i=0}^{4} \theta_1(A_i) A_i \qquad \sum_{i=0}^{4} A_i^3 A_{i-1} = \sum_{i=0}^{4} \theta_1(A_i) A_i$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^2 A_{i-2} = \sum_{i=0}^{4} \theta_3(A_i) A_i \qquad \sum_{i=0}^{4} A_i^3 A_{i-2} = \sum_{i=0}^{4} \theta_3(A_i) A_i$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^2 A_{i+3} = \sum_{i=0}^{4} \theta_4(A_i) A_i \qquad \sum_{i=0}^{4} A_i^3 A_{i-3} = \sum_{i=0}^{4} \theta_4(A_i) A_i$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^2 A_{i+4} = \sum_{i=0}^{4} \theta_2(A_i) A_i \qquad \sum_{i=0}^{4} A_i^3 A_{i+4} = \sum_{i=0}^{4} \theta_2(A_i) A_i$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^4 A_{i+1} = \sum_{i=0}^{4} \theta_1(A_i) A_i \qquad \text{VII}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^4 A_{i+2} = \sum_{i=0}^{4} \theta_3(A_i) A_i$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^4 A_{i+3} = \sum_{i=0}^{4} \theta_4(A_i) A_i$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^4 A_{i+4} = \sum_{i=0}^{4} \theta_2(A_i) A_i.$$

Die rechten Seiten enthalten neben den Unbekannten a, b, c, d nur die Potenzsummen s_i. Die linken sind Funktionen im obigen Sinne, ihre Werte somit ganze Zahlen aus k, die sich, wie wir sahen, einfach aus der numerischen Berechnung ergeben. Bezeichnet wie üblich $[a]$ die nächstliegende ganze Zahl des Wertes a, so heissen diese

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^2 A_{i+1} = [-0{,}5000 + \sqrt{-47} \cdot 0{,}5000] = \frac{-1 + \sqrt{-47}}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^2 A_{i+2} = [-2{,}5001 + \sqrt{-47} \cdot 0{,}4999] = \frac{-5 + \sqrt{-47}}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^2 A_{i+3} = [-2{,}5001 - \sqrt{-47} \cdot 0{,}4999] = \frac{-5 - \sqrt{-47}}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^2 A_{i+4} = [-0{,}5000 - \sqrt{-47} \cdot 0{,}5000] = \frac{-1 - \sqrt{-47}}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^3 A_{i+1} = [-5{,}0003 + \sqrt{-47} \cdot 0{,}0000] = -5$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^3 A_{i+2} = [-0{,}0001 + \sqrt{-47} \cdot 1{,}0000] = \sqrt{-47}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^3 A_{i+3} = [-0{,}0001 - \sqrt{-47} \cdot 1{,}0000] = -\sqrt{-47}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^3 A_{i+4} = [-0{,}5003 - \sqrt{-47} \cdot 0{,}0000] = -5$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^4 A_{i+1} = [-6{,}5000 - \sqrt{-47} \cdot 0{,}5000] = \frac{-13 + \sqrt{-47}}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^4 A_{i+2} = [-1{,}0000 + \sqrt{-47} \cdot 1{,}0002] = -1 + \sqrt{-47}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^4 A_{i+3} = [-1{,}0000 + \sqrt{-47} \cdot 1{,}0002] = -1 - \sqrt{-47}$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_i^4 A_{i+4} = [-6{,}5000 + \sqrt{-47} \cdot 0{,}5000] = \frac{-13 - \sqrt{-47}}{2}.$$

Sie liefern nach ihrer Substitution in VII, analog wie die Summen V, 3.2 verschiedene Bedingungen, die sich dann wieder zufolge der komplexen Natur je in 2 zerlegen. Werden dann noch für die Potenzsummen ihre wirklichen Werte eingesetzt, so erhalten wir schliesslich die 2.3.2 fehlenden Relationen:

$$\begin{aligned}
2a_0 + 6a_1 + 10a_2 + 15a_3 + 26a_4 &= -\frac{1}{2} \\
2b_0 + 6b_1 + 10b_2 + 15b_3 + 26b_4 &= \frac{1}{2} \\
2c_0 + 6c_2 + 10c_2 + 15c_3 + 26c_4 &= -\frac{5}{2} \\
2d_0 + 6d_1 + 10d_2 + 15d_3 + 26d_4 &= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
6a_0 + 10a_1 + 15a_2 + 26a_3 + 49a_4 &= -5 \\
6b_0 + 10b_1 + 15b_2 + 26b_3 + 49b_4 &= 0 \\
6c_0 + 10c_1 + 15c_2 + 26c_3 + 49c_4 &= 0 \\
6d_0 + 10d_1 + 15d_2 + 26d_3 + 49d_4 &= 1
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
10a_0 + 15a_1 + 26a_2 + 49a_3 + 82a_4 &= -\frac{13}{2} \\
10b_0 + 15b_1 + 26b_2 + 49b_3 + 82b_4 &= \frac{1}{2} \\
10c_0 + 15c_1 + 26c_2 + 49c_3 + 82c_4 &= 1 \\
10d_0 + 15d_1 + 26d_2 + 49d_3 + 82d_4 &= 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Aus den so gewonnenen 5.4 Bedingungsgleichungen lassen sich nach üblicher Methode die Unbekannten berechnen. Es sind dies die Werte:

$$
\begin{array}{llll}
a_0 = 1 & 47\,b_0 = 7 & c_0 = -1 & 47\,d_0 = 1 \\
a_1 = 1 & 47\,b_1 = 11 & c_1 = -\frac{3}{2} & 47\,d_1 = \frac{9}{2} \\
a_2 = 1 & 47\,b_2 = 8 & c_2 = -1 & 47\,d_2 = 1 \\
a_3 = \frac{1}{2} & 47\,b_3 = \frac{13}{2} & c_3 = -\frac{1}{2} & 47\,d_3 = \frac{9}{2} \\
a_4 = -1 & 47\,b_4 = -9 & c_4 = 1 & 47\,d_4 = 2,
\end{array}
$$

woraus als definitive Gestalt unserer Funktionen Θ folgt:

$$
\begin{aligned}
\Theta_0(A) &= A \\
\Theta_1(A) &= 1 + A + A^2 + \frac{1}{2}A^3 - A^4 + \\
&\quad + \frac{\sqrt{-47}}{47}\left(7 + 11A + 8A^2 + \frac{13}{2}A^3 - 9A^4\right) \\
\Theta_2(A) &= 1 + A + A^2 + \frac{1}{2}A^3 - A^4 - \\
&\quad - \frac{\sqrt{-47}}{47}\left(7 + 11A + 8A^2 + \frac{13}{2}A^3 - 9A^4\right) \\
\Theta_3(A) &= -1 - \frac{3}{2}A - A^2 - \frac{1}{2}A^3 + A^4 + \\
&\quad + \frac{\sqrt{-47}}{47}\left(1 + \frac{9}{2}A + A^2 - \frac{9}{2}A^3 + 2A^4\right) \\
\Theta_4(A) &= -1 - \frac{3}{2}A - A^2 - \frac{1}{2}A^3 + A^4 - \\
&\quad + \frac{\sqrt{-47}}{47}\left(1 + \frac{9}{2}A + A^2 - \frac{9}{2}A^3 + 2A^4\right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Die Kenntnis der Θ's mitsamt der der Potenzsummen s_k genügen, alle zyklischen Funktionen der A's eindeutig auszuwerten. So ist beispielsweise:

$$
\sum_{i=0}^{4} A_i^l A_{i+1} = s_l + s_{l+1} + s_{l+2} - \frac{1}{2}s_{l+3} - s_{l+4} + \\
+ \frac{\sqrt{-47}}{47}\left(7s_l + 11s_{l+1} + 8s_{l+2} + \frac{13}{2}s_{l+3} - 9s_{l+4}\right)
$$

$$
\sum_{i=0}^{4} A_i^l A_{i+1}^2 = \Sigma A_i^l + \Sigma A_i^{l+1} A_{i+1} + \Sigma A_i^{l+2} A_{i+1} + \frac{1}{2}\Sigma A_i^{l+3} A_{i+1} - \Sigma A_i^{l+4} A_{i+1} + \\
+ \frac{\sqrt{-47}}{47}\left(7\Sigma A_i^l A_{i+1} + 11\Sigma A_i^{l+1} A_{i+1} + 8\Sigma A_i^{l+2} A_{i+1} + \frac{13}{2}\Sigma A_i^{l+3} A_{i+1} - 9\Sigma A_i^{l+4} A_{i+1}\right)
$$

Vergl. Weber III, S. 440.

$$\sum_{i}^{4} A_i^l A_{i+1} A_{i+2} \sum A_i^l A_{i+2} \sum A_i^{l+1} A_{i+2} \sum A_i^{l+1} A_{i+2} \frac{1}{2} \sum A_i^{l+3} A_{i+2} \sum A_i^{l+4} A_{i+2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{-47}}{47}\Big(7 \sum A_i^l A_{i+2} 11 \sum A_i^{l+1} A_{i+2} 8 \sum A_i^{l+2} A_{i+2} \frac{13}{2} \sum A_i^{l+3} A_{i+2} 9 \sum A_i^{l+4} A_{i+2}\Big).$$

Es mögen hier die Werte derjenigen folgen, die später zur Verwendung gelangen:

$$\sum A_i A_{i+1} A_{i+2} = -1$$
$$\sum A_i A_{i+1} A_{i+3} = 3$$
$$\sum A_i^2 A_{i+1} A_{i+2} = \frac{1+\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i A_{i+1}^2 A_{i+2} = 3$$
$$\sum A_i A_{i+1} A_{i+2}^2 = \frac{1+\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i^2 A_{i+1} A_{i+3} = \frac{-1+\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i A_{i+1}^2 A_{i+3} = \frac{-1-\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i A_{i+1} A_{i+3} = 5$$
$$\sum A_i^2 A_{i+2} A_{i+3} = 2$$
$$\sum A_i^2 A_{i+1} A_{i+4} = 3$$

$$\sum A_i^3 A_{i+1}^2 = \frac{3-\sqrt{-47}}{2} \qquad (9)$$
$$\sum A_i^3 A_{i+2}^2 = 3$$
$$\sum A_i^3 A_{i+3}^2 = 2$$
$$\sum A_i^3 A_{i+4}^2 = \frac{3+\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i^3 A_{i+1} A_{i+2} = \frac{-1-\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i^3 A_{i+2} A_{i+4} = \frac{5-\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i^3 A_{i+1} A_{i+3} = \frac{5+\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i^3 A_{i+3} A_{i+4} = \frac{-1+\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i^3 A_{i+3}^2 A_{i+4} = 4$$

$$\sum A_i^2 A_{i+1}^2 A_{i+2} = -1$$
$$\sum A_i^2 A_{i+1}^2 A_{i+3} = -1$$
$$\sum A_i^2 A_{i+1}^2 A_{i+4} = -1$$
$$\sum A_i^2 A_{i+2}^2 A_{i+3} = -1$$
$$\sum A_i^2 A_{i+2}^2 A_{i+4} = -1$$
$$\sum A_i^2 A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3} = -2$$
$$\sum A_i^2 A_{i+1} A_{i+2} A_{i+4} = \frac{-1+\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i^2 A_{i+1} A_{i+3} A_{i+4} = \frac{-1-\sqrt{-47}}{2}$$
$$\sum A_i^2 A_{i+2} A_{i+3} A_{i+4} = -2$$

$$i = 0, \ldots, 4.$$

Bevor wir zur eigentlichen Auflösung schreiten können, müssen unsere Voraussetzungen über I geprüft werden.

Lässt sich auf Grund der Gleichungen (8) und der aus ihnen abgeleiteten Werten unsere Hauptgleichung rekonstruieren, so ist damit die Annahme, sie sei zyklisch in k, als zutreffend erkannt. Es bezeichnen $(-1)^i a_i$, $(i = 1, \ldots, 5)$ die symmetrischen Grundfunktionen, so ergeben sich für sie die Werte:

$$-a_1 = \Sigma A_i = 0$$

$$a_3 = \Sigma A_i A_{i+1} + \Sigma A_i A_{i+2} = -1$$

$$-a_3 = \Sigma A_i A_{i+1} A_{i+2} + \Sigma A_i A_{i+1} A_{i+3} = 2$$

$$a_4 = \Big|(-a_3)\cdot(-a_1) - \Sigma A_i^2 A_{i+1} A_{i+2} + A_i A_{i+1}^2 A_{i+2} + A_i A_{i+1} A_{i+2}^2) - \\ - \Sigma(A_i^2 A_{i+1} A_{i+2} + A_i A_{i+1}^2 A_{i+2} + A_i A_{i+1} A_{i+2}^2)\Big| \frac{1}{4} = -2$$

$$-a_5 = \Big|a_4(-a_1) - \Sigma(A_i^2 A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3} + A_i^2 A_{i+1} A_{i+2} A_{i+4} + \\ + A_i^2 A_{i+1} A_{i+3} A_{i+4} + A_i^2 A_{i+2} A_{i+3} A_{i+4})\Big| \frac{1}{5} = 1$$

$$(i = 0 \ldots 4) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Mit diesem Resultate ist gezeigt, dass die Vorbedingungen gegeben sind, um die Lagrange'schen Resolventen aufstellen zu können. Sie dienen ja dazu, Gleichungen mit zyklischer Gruppe zu lösen. Hier sind es die Funktionen

VIII

$$\psi = (A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + A_3\zeta^3 + A_4\zeta^4)^5 = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4$$

wenn statt ζ eine jede der 5. Einheitswurzeln gesetzt wird. Die $a's$ sind darin zyklische Funktionen der $A's$ und zwar:

$$a_0 = \Sigma A_i^5 + 20\,\Sigma(A_i^3 A_{i+2} A_{i+3} + A_i^3 A_{i+1} A_{i+4}) + \\ + 30\,\Sigma(A_i A_{i+2}^2 A_{i+3}^2 + A_i A_{i+1}^2 A_{i+4}^2) + 120\,A_1 A_2 A_3 A_4 A_0$$

$$a_1 = 5\Big|\Sigma A_i^4 A_{i+1} + 2\,\Sigma A_i^3 A_{i+3}^2 + 4\,\Sigma A_i^3 A_{i+2} A_{i+1} + \\ + 6\,\Sigma A_i A_{i+1}^2 A_{i+2} + 12\,\Sigma A_i^2 A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3}\Big|$$

$$\alpha_2 = 5\Big|\Sigma A_i^4 A_{i+2} + 2\,\Sigma A_i^3 A_{i+1}^2 + 4\,\Sigma A_i^3 A_{i+4}^2 A_{i+3}^2 + 6\,\Sigma A_i A_{i+2}^2 A_{i+4}^2 + 12\,\Sigma A_i^2 A_{i+2} A_{i+4} A_{i+1}\Big|$$

$$\alpha_3 = 5\Big|\Sigma A_i^4 A_{i+3} + 2\,\Sigma A_i^3 A_{i+4}^2 + 4\,\Sigma A_i^3 A_{i+4} A_{i+2} + 6\,\Sigma A_i A_{i+3}^2 A_{i+1}^2 + 12\,\Sigma A_i^2 A_{i+3} A_{i+1} A_{i+4}\Big|$$

$$\alpha_4 = 5\Big|\Sigma A_i^4 A_{i+4} + 2\,\Sigma A_i^3 A_{i+2}^2 + 4\,\Sigma A_i^3 A_{i+3} A_{i+1} + 6\,\Sigma A_i A_{i+4}^2 A_{i+3}^2 + 12\,\Sigma A_i^2 A_{i+4} A_{i+3} A_{i+2}\Big|$$

$$(i = 0, \ldots . 4)$$

oder nach (9) numerisch ausgewertet:

$$\alpha_0 = 325$$

$$\alpha_1 = -\frac{325 + 15\sqrt{-47}}{2}$$

$$\alpha_2 = \quad 40\sqrt{-47}$$

$$\alpha_3 = -\quad 40\sqrt{-47}$$

$$\alpha_4 = -\frac{325 - 15\sqrt{-47}}{2}.$$

Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, so sind ζ^2, ζ^3, ζ^4, $\zeta^5 - 1$ die andern der Gleichung $x^5 - 1 = 0$ genügenden Werte und die ψ's gestatten eine Darstellung durch Potenzen ein und desselben ζ, indem

$$\zeta^{k.i} = \zeta^l \qquad 0 \leqq l < 5 \qquad k.i \qquad l\,(5).$$

Die Resolventen lauten infolgedessen: IX

$$\psi_0 = 5\,(65 - \frac{65 + 3\sqrt{-47}}{2}\,\zeta + 8\sqrt{-47}\,\zeta^2 - 8\sqrt{-47}\,\zeta^3 - \frac{65 - 3\sqrt{-47}}{2}\,\zeta^4)$$

$$\psi_1 = 5\,(65 - \frac{65 + 3\sqrt{-47}}{2}\,\zeta^2 + 8\sqrt{-47}\,\zeta^4 - 8\sqrt{-47}\,\zeta^1 - \frac{65 - 3\sqrt{-47}}{2}\,\zeta^3)$$

$$\psi_2 = 5\,(65 - \frac{65 + 3\sqrt{-47}}{2}\,\zeta^3 + 8\sqrt{-47}\,\zeta^1 - 8\sqrt{-47}\,\zeta^4 - \frac{65 - 3\sqrt{-47}}{2}\,\zeta^2)$$

$$\psi_3 = 5\,(65 - \frac{65 + 3\sqrt{-47}}{2}\,\zeta^4 + 8\sqrt{-47}\,\zeta^3 - 8\sqrt{-47}\,\zeta^2 - \frac{65 - 3\sqrt{-47}}{2}\,\zeta^1)$$

$$\psi_4 = 0,$$

und in Summen von 5. Wurzeln dieser ψ's finden die Wurzeln der Hauptgleichung ihren algebraischen Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
5\,A_0 &= \sqrt[5]{\psi_0} + \sqrt[5]{\psi_1} + \sqrt[5]{\psi_2} + \sqrt[5]{\psi_3} \\
5\,A_1 &= \zeta^4\sqrt[5]{\psi_0} + \zeta^3\sqrt[5]{\psi_1} + \zeta^2\sqrt[5]{\psi_2} + \zeta^1\sqrt[5]{\psi_3} \\
5\,A_2 &= \zeta^3\sqrt[5]{\psi_0} + \zeta^1\sqrt[5]{\psi_1} + \zeta^4\sqrt[5]{\psi_2} + \zeta^2\sqrt[5]{\psi_3} \\
5\,A_3 &= \zeta^2\sqrt[5]{\psi_0} + \zeta^4\sqrt[5]{\psi_1} + \zeta^1\sqrt[5]{\psi_2} + \zeta^3\sqrt[5]{\psi_3} \\
5\,A_4 &= \zeta^1\sqrt[5]{\psi_0} + \zeta^2\sqrt[5]{\psi_1} + \zeta^3\sqrt[5]{\psi_2} + \zeta^4\sqrt[5]{\psi_3};
\end{aligned}
\qquad \text{X}
$$

denn

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} \\
\zeta^2 &= -\frac{\sqrt{5}-1}{2} + i\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} \\
\zeta^3 &= -\frac{\sqrt{5}-1}{2} - i\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} \\
\zeta^4 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}.
\end{aligned}
\qquad \text{XI}
$$

Aus diesen Darstellungen erhellt, dass I selbst im Körper $k(\sqrt{-47})$ irreduzibel bleibt. Denn die Reduzibilität würde verlangen, dass einer der Faktoren vom ersten oder zweiten Grade sei. Nun lassen sich aber die ψ in k nicht als 5. Potenzen darstellen, wie das nach Substitution von XI in IX ohne weiteres einleuchtet, indem dann

$$
\begin{aligned}
\psi_0 &= 5\left|65\,(5-\sqrt{5}) + \sqrt{2.47}\,(3\sqrt{5+\sqrt{5}} - 16\sqrt{5-\sqrt{5}})\right| \\
\psi_1 &= 5\left|65\,(5+\sqrt{5}) + \sqrt{2.47}\,(3\sqrt{5}-\sqrt{5+\sqrt{5}} + 16\sqrt{5+\sqrt{5}})\right| \\
\psi_2 &= 5\left|65\,(5+\sqrt{5}) - \sqrt{2.47}\,(3\sqrt{5}+\sqrt{5-\sqrt{5}} - 16\sqrt{5-\sqrt{5}})\right| \\
\psi_3 &= 5\left|65\,(5-\sqrt{5}) - \sqrt{2.47}\,(3\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}} - 16\sqrt{5-\sqrt{5}})\right|
\end{aligned}
$$

wird und sind von einander verschieden. Also wird schon die einfachste symmetrische Funktion keine Zahl aus k ergeben. [Noch einfacher

würde diesen Nachweis das auch für quadratische Körper geltende Kriterium[1]) erbringen: „Die Gleichung $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$ ist gewiss irreduzibel, wenn die absoluten Werte von $n-1$ ihrer Wurzeln kleiner als 1 sind", was nach VI hier zutrifft]. Es liegt in dieser Erkenntnis nur die Bestätigung des aus der kompl. Multiplikation der ell. Funktionen her bekannten Satzes:

Die Klassengleichung ist im Rationalitätsbereich Ω (hier $k(\sqrt{-47})$) irreduzibel.[2])

Weiterhin ist aus IX, X, XI die algebraische Auflösbarkeit von I, d. h. die Darstellung ihrer Wurzeln durch Radikale, zu ersehen. Wie die Koeffizienten der ζ in IX zeigen, war die Adjunktion von $\sqrt{-47}$ zum Körper der rationalen Zahlen notwendig, um zu einer Gleichung mit zyklischer Gruppe zu gelangen. Daraus folgt wohl die relativzyklische Beschaffenheit unserer Gleichung in bezug auf k. Unentschieden bleibt aber doch die Frage, ob I nicht auch im Körper der rationalen Zahlen Abelsch sein könne. Eine notwendige Bedingung für diese letztere Eigenschaft ist, dass sich alle Wurzeln rational durch eine unter ihnen ausdrücken lassen. Enthält dieser Ausdruck, was immer erlangt werden kann, als höchste Potenz der betreffenden Wurzel die $(n-1)$. (n = Grad der Gleichung), so ist er eindeutig. Eine solche Darstellung ist für unsern Fall (8), aus der auch diese relative Gruppeneigenschaft leicht ersichtlich.[3])

Die Gleichung $x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$ ist Abelsch im quadratisch imaginären Körper $k(\sqrt{-47})$ und lässt sich durch ihn und den Kreisteilungskörper k lösen.[4])

[1]) Perron, O.: Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebr. Gleichungen. Journal für Math. B. 132, S. 288.
[2]) Weber III, S. 448.
[3]) Vergl. Weber III, S. 441.
[4]) Vergl. Fueter: Die Theorie der Zahlstrahlen. Journal f. Math. B 132, S. 255.

Zweites Kapitel.

Körper-Basis und -Diskriminante.

§ 2.

Der Galoissche Körper $K(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ enthält zufolge der im vorigen Kapitel gefundenen Eigenschaften der Hauptgleichung die Unterkörper:

$$k(\sqrt{-47}) \qquad k(A_0) \qquad k(A_1) \qquad k(A_2) \qquad k(A_3) \qquad k(A_4),$$

wo die A's die oben (Kapitel I) festgelegte Bedeutung haben. Der erste ist vom 2., jeder der übrigen vom 5. Grade, K selbst vom Grade 10.

Der quadratische Zahlkörper $k(\sqrt{-47})$ [1]) oder kurz k, hat

1) die Diskriminante	-47
2) die Basiszahlen	$1, \omega = \frac{1+\sqrt{-47}}{2}$
3) die Einheiten	± 1
4) die Klassenanzahl	5
5) das Geschlecht	1.

Sei J diejenige der Nebenklassen, in der das Jdeal $(2, 1+\omega)$ vorkommt, so lauten bezügliche Repräsentanten für

J^5	$(1, \omega)$
J^1	$(2, 1+\omega')$
J^3	$(3, \omega')$
J^2	$(3, \omega)$
J	$(2, 1+\omega)$

wobei ω' die konjugierte Zahl zu ω bezeichnet.

[1]) Diese Angaben sind dem Lehrbuch: J. Sommer, Vorlesungen über Zahlentheorie (Teubner 1907) entnommen. S. 349.

Wir machen hier auf die Analogie der Klassen mit den in Kapitel I betrachteten Substitutionen Θ aufmerksam. J ist zu J^4, J^2 zu J^3 konjugiert; denn ihre Produkte geben wieder die Hauptklasse J^5, wie das ja aus den bezw. Produkten ihrer Repräsentanten

$$(2,\ 1+\omega)\ (2,\ 1+\omega') = n\ (2,\ 1+\omega) = 2$$
$$(3,\ \omega)\ (3,\ \omega') = n\ (3,\ \omega) = 3 \qquad n = \text{Norm}$$

so augenfällig wird. Es entspricht also

$$\begin{aligned} J &\ldots\ldots\ldots \Theta_1 \\ J^2 &\ldots\ldots\ldots \Theta_3 \\ J^3 &\ldots\ldots\ldots \Theta_4 \\ J^4 &\ldots\ldots\ldots \Theta_2 \\ J^5 &\ldots\ldots\ldots \Theta_5, \end{aligned}$$

was genau wieder dieselbe Verschiebung der Indizes in den Θ's bewirkt wie sie (2^a) I, zeigt.

Satz: Zwischen der Relativgruppe der Hauptgleichung in bezug auf k und den Klassen dieses Körpers besteht holoedrischer Isomorphismus.[1])

§ 3.

Von den Körpern 5. Grades ist $k(A_0)$ ein reeller und sind $k(A_1)$, $k(A_4)$ sowie $k(A_2)$ und $k(A_3)$ Paare von konjugiert komplexen. Nach dem in der Körpertheorie üblichen Ausdruck heissen alle 5 zu einander konjugiert. Sei $k\ (A_i)$ ein beliebiger unter ihnen, so gilt der Satz:

1) Die Diskriminante des Körpers $k\ (A_i)$ hat den Wert 47^2; 2) die Potenzen 1, A_i, A_i^2, A_i^3, A_i^4 bilden ein System normaler Basiszahlen, und 3) A_i stellt eine Einheit des Körpers dar.

3) folgt unmittelbar aus dem absoluten Gliede der Hauptgleichung. Wir werden später (Kap. IV) sehen, dass es sogar als eine der Grundeinheiten von $k(A_i)$ gewählt werden kann.

1) ergibt sich aus dem Umstande, dass die Diskriminante von A_i nur die Primzahl 17 enthält. Sie hat, wie zu Beginn des Kap. I bemerkt

[1]) Weber III S. 441. — Fueter: Der Klassenkörper der quadr. Körper und die kompl. Mult. Diss. Gött. 1903. — Fueter: Journal für Math. l. c. S. 267.

wurde, den Wert 47^2. Es ist aber die Körperdiskriminante ein gemeinsamer Teiler der Diskriminanten aller ganzen Zahlen des Körpers und verschieden von 1; also entweder gleich 47 oder 47^2.

Seien $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ die Basiszahlen unseres Körpers, so gestatten sie eine Darstellung [1])

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 1 \\
\omega_2 &= \frac{a_0 + a_1 A_i}{47^2} \\
\omega_3 &= \frac{b_0 + b_1 A_i + b_2 A_i^2}{47^2} \\
\omega_4 &= \frac{c_0 + c_1 A_i + c_2 A_i^2 + c_3 A_i^3}{47^2} \\
\omega_5 &= \frac{e_0 + e_1 A_i + e_2 A_i^2 + e_3 A_i^3 + e_4 A_i^4}{47^2},
\end{aligned} \tag{1}$$

worin die a, b, c, e ganze rationale Zahlen $< 47^2$ sind. Die Körperdiskriminante [2]) d wird bekanntlich definiert durch das Quadrat der Determinante:

$$\begin{vmatrix}
\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 \\
\omega_1' & \omega_2' & \omega_3' & \omega_4' & \omega_5' \\
\omega_1'' & \omega_2'' & \omega_3'' & \omega_4'' & \omega_5'' \\
\omega_1''' & \omega_2''' & \omega_3''' & \omega_4''' & \omega_5''' \\
\omega_1'''' & \omega_2'''' & \omega_3'''' & \omega_4'''' & \omega_5''''
\end{vmatrix}$$

in der $\omega', \omega'', \omega''', \omega''''$ die zu ω konjugierten Zahlen bezeichnen. Werden hierin die obigen Werte für die ω_i substituiert, die Konjugierten mittelst $A_{i+1}, A_{i+2} \ldots A_{i+4} = A_l$ $(i + k \equiv l\,(5),\ 0 \leqq l < 5)$ gebildet und die Determinante nach den bekannten Regeln vereinfacht, so findet sich ihr Wert

$$d = \begin{vmatrix}
1 & A_i & A_i^2 & A_i^3 & A_i^4 \\
1 & A_{i+1} & A_{i+1} & A_{i+1} & A_{i+1} \\
1 & A_{i+2} & A_{i+2} & A_{i+2} & A_{i+2} \\
1 & A_{i+3} & A_{i+3} & A_{i+3} & A_{i+3} \\
1 & A_{i+4} & A_{i+4} & A_{i+4} & A_{i+4}
\end{vmatrix}^2 \frac{a_1^2 \cdot b_2^2 \cdot c_3^2 \cdot e_4^2}{47^{16}} = \frac{a_1^2 \cdot b_2^2 \cdot c_3^2 \cdot e_4^2}{47^{16}} \cdot d(A_i).$$

[1]) Zahlbericht S. 180, Satz 5.
[2]) Zahlbericht S. 194.

$d(A_i) = 17^2$, d ist ganz und rational, also stellt die rechte Seite das Quadrat einer ganzen rationalen Zahl dar. So wird

$$d = 17^2,$$

und dies kann nur möglich sein, wenn $a_1 = b_2 = c_3 = e_4 = 17^2$; d. h. 1, A_i, A_i^2, A_i^3, A_i^4 sind Basiszahlen.

§ 4.

Der Galoissche Körper $K(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ oder kurz K ist nach dem in Kap. I Gesagten identisch mit $K(\sqrt{-47}, A_i)$ also, wie bereits erwähnt, vom 10. Grade. Die Diskriminante D von K kann nur die Primzahl 47 enthalten, indem sich in den Körperdiskriminanten von $k(A_i)$ $(i = 0, \ldots, 4)$ keine weiteren vorfinden. Hier wie im vorhergehenden Falle führt auch wieder das Prinzip, ein System von ganzen Zahlen aufzustellen, deren Determinante absolut den kleinst möglichen Wert, $= 0$, annimmt, dazu, die Basiszahlen aufzufinden. Diese werden nicht einfach durch Multiplikation derjenigen aus $k(\sqrt{\quad} 17)$, $k(A_i)$ erhalten, d. h.:

$$1,\ A_i,\ A_i^2,\ A_i^3,\ A_i^4,\ \frac{1+\sqrt{-47}}{2},\ \frac{1+\sqrt{-47}}{2}A_i,\ \frac{1+\sqrt{-47}}{2}A_i^2,$$
$$\frac{1+\sqrt{-47}}{2}A_i^3,\ \frac{1+\sqrt{-47}}{2}A_i^4 \qquad (2)$$

bilden keine Basis unseres Körpers k. Es lassen sich nämlich leicht ganze Zahlen angeben, die nicht linear durch die Grössen (2) mit ganzen rationalen Koeffizienten dargestellt werden können, was doch die Eigenschaft des Systems (2), Basiszahlen zu sein, verlangen würde. Solche sind, wie die Substitutionen Θ in (8) Kap. I zeigen, die von A_i verschiedenen Wurzeln der Hauptgleichung nebst den aus ihnen abgeleiteten:

$$B_1 = \theta_1(A_i) - \theta_2(A_i) = (14 + 22A_i + 16A_i^2 + 13A_i^3 - 18A_i^4)\frac{1}{\sqrt{-17}}$$

$$B_2 = \theta_3(A_i) - \theta_4(A_i) = (2 + 9A_i + 2A_i^2 - 9A_i^3 + 4A_i^4)\frac{1}{\sqrt{-17}}$$

$$B_3 = \sqrt{-47}\,A_i^4 + B_1 = (11 + 22A_i + 16A_i^2 + 13A_i^3 + 29A_i^4)\frac{1}{\sqrt{-47}}$$

$$C_1 = -7B_2 + B_3 + A_i\sqrt{-47} - 2A_i^3\sqrt{-47} =$$
$$= (6A_i + 2A_i^2 - 18A_i^3 + A_i^4)\frac{1}{\sqrt{-47}}$$

$$C_2 - 2B_1 + 9B_2 - \sqrt{-47}(A_i + 3A_i^2 + A_i^3 + A_i^4 + 1) =$$
$$= (-11 - 16A_i + 3A_i^2 + 8A_i^3)\frac{1}{\sqrt{-47}}$$

$$C_3 = \sqrt{-47}\cdot A_i - C_2 = (6 + 2A_i - 18A_i^2 + A_i^3)\frac{1}{\sqrt{-47}}.$$

C_2 würde sich, da A_i eine Einheit, einfach durch Division von C_1 durch diese ergeben, aber die beiden verschiedenen Herleitungen zeigen, dass eine Zahl von der Gestalt

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 A_i + \alpha_2 A_i^2}{\sqrt{-47}} \quad \text{also auch} \quad \frac{\alpha_0 + \alpha_1 A_i}{\sqrt{47}}$$

in K nicht existiert, falls nicht alle $\alpha's$ kongruent der Null modulo 47 sind.

Satz: In der Tat bilden die Grössen:

$$\Omega_1 = 1 \qquad \Omega_6 = \frac{1 - \sqrt{47}}{2}$$

$$\Omega_2 = A_i \qquad \Omega_7 = \frac{1 + \sqrt{47}}{2} A_i$$

$$\Omega_3 = A_i^2 \qquad \Omega_8 = \frac{1 + \sqrt{-47}}{2} A_i^2 \qquad (3)$$

$$\Omega_4 = A_i^3 \qquad \Omega_9 = \frac{1 + \sqrt{-47}}{2} \cdot \frac{6 + 2A_i - 18A_i^2 + A_i^3}{\sqrt{-47}}$$

$$\Omega_5 = A_i^4 \qquad \Omega_{10} = \frac{1 + \sqrt{-47}}{2} \cdot \frac{6A_i + 2A_i^2 - 18A_i^3 + A_i^4}{\sqrt{-47}}$$

eine Basis unseres Galoisschen Körpers.

Setzt man um einfacherer Schreibweise willen $A_i = A_0$, wodurch die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, so lässt sich unter der Annahme, (3) stelle ein Basissystem dar, die Diskriminante D als Quadrat einer 10-reihigen Determinante der Ω und seiner Konjugierten schreiben, die ausgewertet in A leicht auf die einfache Form

$$D = \begin{vmatrix} 1 & A_0 & A_0^2 & A_0^3 & A_0^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & A_0 & A_0^2 & A_0^3 & A_0^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}^2 \cdot 47$$

gebracht wird, deren Wert sich zu

$$D = 47^5$$

ergibt.

Anderseits lässt sich die mögliche minimale Zahl für D angeben, indem ja die Konstruktion des Körpers $K = K(A_0, \sqrt{-47})$ bekannt ist. Wir verwenden dazu den Satz über Relativdiskriminanten [1])

$$D = d^r n(D_k) \qquad (4)$$

wo D die Diskriminante von K, d die von k und $n(D_k)$ die Norm der Relativdiskriminante von K in bezug auf k bezeichnet; r ist der Relativgrad von K bezogen auf k. Hiernach erhalten wir

$$D = 47^5 \cdot n(D_k).$$

$n(D_k)$ muss eine ganze rationale Zahl sein, ihr kleinst möglicher Wert also 1. Für D folgt daraus die Zahl 47^5, also genau der oben gefundene Wert. Damit ist der Beweis erbracht, und seine wichtigste Konsequenz lautet

$$n(D_k) = 1,$$

also D_k ein Einheitsideal, eine Tatsache, für die in Kap. III ein zweiter Beweis geliefert wird.

Satz: Die Diskriminante des Körpers $K(A_0 \ldots A_4)$ hat den Wert 47^5.

[1]) Zahlbericht S. 206, Satz 39.

Drittes Kapitel.

§ 5.

Relativ-Diskriminante und Differente.

Zu einer weitern Wertbestimmung der Relativdiskriminante D_k von K in Bezug auf k adjungieren wir nach dem Vorgange von Furtwängler[1]) zu unserem Grundkörper die 5. Einheitswurzel $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ konstruieren über den neuen Rationalitätsbereich k' einen geeigneten Oberkörper vom 5. Grade, sodass K darin enthalten ist. Der Körper $k(\zeta)$ vom Grade 4 hat die Basiszahlen[2]) $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3$ und die Diskriminante 5^3, die prim ist zu derjenigen von $k(\sqrt{-47})$. Der kombinierte Bereich $k'(\zeta, \sqrt{-47})$. der vom Grade 8 ist, besitzt somit die Diskriminante

$$d' = 47^4 \cdot (5^3)^2 = 47^4 \cdot 5^6$$

und

$$1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\zeta, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\zeta^2, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\zeta^3$$

bilden seine Normalbasis. Zur Konstruktion eines Oberkörpers über k' genügt es, eine ganze Zahl μ aus k der Art auszuwählen, dass sie nicht gleich der 5. Potenz einer ganzen Zahl aus k' ist.

$$K'(\sqrt[5]{\mu}, k')$$

wird dann zu einem Oberkörper mit zyklischer Relativgruppe von Primzahlgrad, in dessen Relativdiskriminante bezüglich k' nur die ambigen Primideale aufgehen[3]). Wählen wir für μ eine der Funktionen ψ [Kap. I, IX], so besitzt μ, wie dort nachgewiesen wurde,

[1]) Furtwängler: Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebr. Zahlkörpers. 1906, Math. Annalen, Bd. 63, S. 1—37. — Fueter, l. c. Math. Vereinig., S. 42.

[2]) Zahlbericht S. 327.

[3]) Furtwängler, Mathem. Annalen, Bd. 58, S. 4.

die oben verlangte Beschaffenheit, und der so erhaltene Körper K' ist tatsächlich ein Oberkörper über K; denn dadurch, dass wir ζ, die Wurzel einer reinen Gleichung, heranzogen, wurde derselbe Körper erzielt, wie ihn die Adjunktion von A_i ergeben hätte, d. h.

$$K'(\sqrt[5]{\mu}, k') = K'(\sqrt[5]{A_i}, k').$$

Wir setzen

$$\mu = \nu_0 = 5(65 \quad \frac{65+3\sqrt{-47}}{2}\zeta + 8\sqrt{\quad} \quad 47\,\zeta^2 \quad 8\sqrt{\quad} \quad 47\,\zeta^3 \quad \frac{65 \quad 3\sqrt{\quad}}{2} \quad 47\,\zeta^4)$$

$$= (1 \quad \zeta).5.(65 + \frac{65 \quad 3\sqrt{\quad}}{2} \quad 47\,\zeta + \frac{65+13\sqrt{\quad}}{2} \quad 47\,\zeta^2 + \frac{65 \quad 3\sqrt{\quad}}{2} \quad 47\,\zeta^3)$$

$$= (1-\zeta)^5 \; \mu^*$$

$$\mu^* = (1+\zeta)(1+\zeta+\zeta^2)(1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3)(65 + \frac{65-3\sqrt{-47}}{2}\zeta +$$

$$+ \frac{65+13\sqrt{-47}}{2}\zeta^2 + \frac{65-3\sqrt{-47}}{2}\zeta^3);$$

μ und μ^* bestimmen denselben Oberkörper. Die Normbildung von μ^* ergibt

$$n(\mu^*) = 1.$$

Folglich geht kein zu 5 primes Primideal in der Relativkriminante $D'_{k'}$ von K' in bezug auf k' auf.[1]) Es erübrigt also bloss die Untersuchung der in 5 aufgehenden Primideale.

5 kann in $k(\sqrt{-47})$ nicht zerlegt werden, $\left(\frac{-47}{5}\right) = -1$; in $k(\zeta)$ hingegen erfährt diese Primzahl eine Zerfällung

$$(5) = (1-\zeta)^4.$$

$(1-\zeta)$ bleibt also auch im komponierten Körper k' Primideal. Soll auch $(1-\zeta)$ nicht in der Relativdiskriminante $D'_{k'}$ enthalten sein, so muss eine Congruenz

$$\mu^* \quad \beta^5, \left[(1- \quad \zeta)^5\right]$$

[1]) Furtwängler: Math. Annalen, Bd. 58, S. 6. — Fueter: Math. Vereinigung, Bd. 20, S. 27.

bestehen, worin β einer ganzen Zahl aus k' gleich wird.[1]) In der Tat

$$\mu^* = 12.65 + 24\sqrt{-47} + \frac{23.65+35\sqrt{-47}}{2}\zeta + \frac{23.65+25\sqrt{-47}}{2}\zeta^2 +$$

$$+ \frac{25.65+25\sqrt{-47}}{2}\zeta^3 + \frac{25.65+35\sqrt{-47}}{2}\zeta^4 - (\sqrt{-47})^5[(1-\zeta)^5].$$

Also ist die Relativdiskriminante von K' bezogen auf k' die Einheit, oder der Oberkörper K' ist unverzweigt.[2])

Zwischen $D'_{k'}$ und der Diskriminante D' von K' besteht die bereits in Kap. II (4) angegebene Beziehung

$$D' = d'^r n(D'_{k'}) = d'^r; \qquad (2)$$

r hat auch hier wieder den Wert 5. Für d' fanden wir in (1) $d' = 47^4 5^6$;

$$D' = (47^4 . 5^6)^5 = 47^{20} 5^{30}. \qquad (3)$$

Umgekehrt folgt unter Anwendung der Relation (2) wenn D'_k die Relativdiskriminante von K' bezüglich k bezeichnet und d die Diskriminante von k

$$D' = d^r n(D'_k) . = (-47)^{20} n(D'_k),$$

indem hier $r = 20$. Substituiert man für D' den Wert in (3), so ist damit $n(D'_k)$ gegeben

$$n(D'_k) = 5^{30}.$$

In D'_k kommt also bloss die Primzahl 5 vor; 5 wird ja in k nicht zerlegt und da K ein Unterkörper von K' kann auch die Relativdiskriminante D_k von K bezogen auf k keine weiteren Primteiler enthalten, wenn nicht die Primzahl 5. Würde auch diese in D_k aufgehen, so müsste 5 in K in 5 ambige Primideale zerfallen. Wie aber bereits klargelegt wurde, erfährt 5 selbst im Oberkörper K' nur die Zerlegung $(1-\zeta)^4$, also nur in 4 Primideale. 5 kann also unmöglich ein Teiler von D_k sein, d. h.

$$D_k = 1.$$

[1]) Furtwängler: Math. Annalen, l. c. Satz 4. — Fueter: Math. Vereinigung, Bd. 20, S. 27.

[2]) Zahlbericht S. 254 u. ff.

Aus der Einfachheit der Relativdiskriminante folgt sofort der Wert der bezüglichen Relativdifferente[1]) $\mathfrak{D}_k$. Relativdiskriminante und Relativdifferente genügen nämlich der Relation:

$$D_k = N_k(\mathfrak{D}_k)$$

wo $N_k(\mathfrak{D}_k)$ die Relativnorm von $\mathfrak{D}_k$ bedeuten soll. $\mathfrak{D}_k$ wird also ein Einheitsideal sein

$$\mathfrak{D}_k = (1).$$

Diese ganze Untersuchung über D_k liesse sich übrigens einfacher durchführen unter Benützung des Umstandes, dass die Relativdiskriminante einen gemeinsamen Teiler der Diskriminanten aller ganzen Zahlen aus K bezogen auf k darstellt.

Die Relativdiskriminante der auf Seite 31 angegebenen Zahl C_3 hat den Wert

$$D_k(C_3) = 3448091^2,$$

und für $D_k(A_i)$ fanden wir

$$D_k(A_i) = 47^2;$$

weil aber das Ideal

$$(3448091, 47) = (1)$$

ein Einheitsideal bezeichnet, so ist auch $D_k = 1$.

Satz: Die relative Diskriminante wie die relative Differente von K bezogen auf k sind der Einheit gleich.

§ 6.

Zerlegung der Primzahlen.

Die fundamentalen Resultate [Kap. II § 2, Kap. III § 5], dass

1. der Körper K in bezug auf k unverzweigt,

2. die Gruppe von K bei zu Grunde gelegten Rationalitätsbereich k mit den Idealklassen dieses Körpers holoedrisch isomorph ist, genügen, den Oberkörper K vollständig zu charakterisieren[2]): Es ist K der Klassenkörper von k.

[1]) Zahlbericht S. 205.

[2]) Vergl. Hilbert: Gött. Nachrichten, 1908, S. 370. — Furtwängler: Math. Annalen, Bd. 63, S. 3.

Im Klassenkörper hat man den interessanten Fall, dass alle Ideale des Grundkörpers in ihm zu Hauptidealen werden, also durch ganze Zahlen aus K sich darstellen lassen. Dabei übt er auf die Primideale gleicher Klasse aus k stets dieselbe zerfällende Wirkung aus und zwar in unserem Falle eine solche, dass diejenigen der Nebenklassen von k in die Hauptklasse von K fallen, ohne eine Zerspaltung zu erfahren und diejenigen der Hauptklasse von k in K sich in 5 verschiedene Primideale zerlegen; allein das in k ambige Ideal $(\sqrt{-47})$ nimmt insofern eine Sonderstellung ein, dass seine 5 Primideale der Hauptklasse angehören. Ambige Primideale finden sich in K keine; denn solche müssten in der Relativdifferente aufgehen[1]) und diese ist, wie § 5 gezeigt hat, ein Einheitsideal.

1. Beispiel: Die Primzahlen 5, 11, 919 werden in k nicht zerlegt; denn

$$\left(\frac{-47}{5}\right) = \left(\frac{-47}{11}\right) = \left(\frac{-47}{919}\right) = -1.$$

Sie gehören also der Hauptklasse an. In K erfahren sie die Zerfällung

$$\begin{aligned}
(5) &= (5, 1-A_0)\ (5, 1-A_1)\ (5, 1-A_2)\ (5, 1-A_3)\ (5, 1-A_4)\\
(11) &= (11, 2-A_0)\ (11, 2-A_1)\ (11, 2-A_2)\ (11, 2-A_3)\ (11, 2-A_4)\\
(919) &= (919, 4-A_0)\ (919, 4-A_1)\ (919, 4-A_2)\ (919, 4-A_3)\ (919, 4-A_4),
\end{aligned}$$

indem $n\,(1 - A_0) = 5$, $n\,(2 - A_0) = 11$ $n\,(4 - A_0) = 919$.

2. Beispiel: Die Primzahlen 191, 2939, 7621 zerfallen in k in das Produkt zweier Primideale, die aber der Hauptklasse angehören:

$$\left(\frac{-47}{191}\right) = \left(\frac{-47}{2939}\right) = \left(\frac{-47}{7621}\right) = +1$$

$$(191) = (12 + \sqrt{-47})\ (12 - \sqrt{-47})$$

$$\begin{aligned}
(2939) &= (2939, 1184 + \sqrt{-47})\ (2939, 1184 - \sqrt{-47})\\
&= (42 + 5\sqrt{-47})\ (42 - 5\sqrt{-47})
\end{aligned}$$

$$(7621) = (77 + 6\sqrt{-47})\ (77 - 6\sqrt{-47}),$$

[1]) Zahlbericht S. 277.

also wird im Körper K

$$(191) = (12+\sqrt{-47}, 3-A_0)(12+\sqrt{-47}, 12-A_1)(12+\sqrt{-47}, 12-A_2)$$
$$(12+\sqrt{-47}, 12-A_3)(12+\sqrt{-47}, 3-A_4)$$
$$(12-\sqrt{-47}, 3-A_0)(12-\sqrt{-47}, 3-A_1)(12-\sqrt{-47}, 3-A_2)$$
$$(12-\sqrt{-47}, 3-A_3)(12-\sqrt{-47}, 3-A_4),$$

$$(2939) = (42+5\sqrt{-47}, 5-A_0)(42+5\sqrt{-47}, 5-A_1)(42+5\sqrt{-47}, 5-A_2)$$
$$(42+5\sqrt{-47}, 5-A_3)(42+5\sqrt{-47}, 5-A_4)$$
$$(42-5\sqrt{-47}, 5-A_0)(42-5\sqrt{-47}, 5-A_1)(42+5\sqrt{-47}, 5-A_2)$$
$$(42-5\sqrt{-47}, 5-A_3)(42-5\sqrt{-47}, 5-A_4),$$

$$(7621) = (77+6\sqrt{-47}, 6+A_0)(77+6\sqrt{-47}, 6+A_1)(77+6\sqrt{-47}, 6+A_2)$$
$$(77+6\sqrt{-47}, 6+A_3)(77+6\sqrt{-47}, 6+A_4)$$
$$(77-6\sqrt{-47}, 6+A_0)(77-6\sqrt{-47}, 6+A_1)(77-6\sqrt{-47}, 6+A_2)$$
$$(77-6\sqrt{-47}, 6+A_3)(77-6\sqrt{-47}, 6+A_4);$$

denn $n\,(3-A_0) = 191$ $\quad n\,(5-A_0) = 2939$ $\quad n\,(6+A_0) = 7621.$

3. Beispiel: Die Primzahlen 2 und 3 lassen sich in k zerlegen

$$\left(\frac{-47}{2}\right) = \left(\frac{-47}{3}\right) = 1;$$

ihre Primideale

$$(2) = \left(2, \frac{3+\sqrt{-47}}{2}\right)\left(2, \frac{3-\sqrt{-47}}{2}\right)$$
$$(3) = \left(3, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)\left(3, \frac{1-\sqrt{-47}}{2}\right)$$

fallen in die Nebenklassen und werden also in K zu Hauptidealen:

$$\left(2, \frac{3-\sqrt{-47}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}A_0 - \frac{1}{2}A_0^2 + \frac{1}{2}A_0^4 + \right.$$
$$\left. \frac{1}{\sqrt{-47}}\left(\frac{13}{2} + \frac{35}{2}A_0 + \frac{13}{2}A_0^2 + 6A_0^3 - \frac{21}{2}A_0^4\right)\right)^{1})$$
$$= (1121\,\Omega_1 + 437\,\Omega_2 - 3343\,\Omega_3 - 6\,\Omega_4 + 11\,\Omega_5 -$$
$$- 47\,\Omega_6 - 19\,\Omega_7 + 139\,\Omega_8 - 366\,\Omega_9 - 21\,\Omega_{10})$$

[1]) Diese Darstellungen sind frei von Einheiten aus K.

$$\left(3, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = (1 + 2A_0 + A_0^2 + \frac{1}{2}A_0^3 \cdot \cdot A_0^4 +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{-47}}(1 - A_0 + 7A_0^2 - \cdot \frac{23}{2}A_0^3 + 5A_0^4)\Big)$$
$$= (-180\Omega_1 - 189\Omega_2 + 1134\Omega_3 + 12\Omega_4 - 6\Omega_5 +$$
$$+ 20\Omega_6 + 8\Omega_7 - 60\Omega_8 + 157\Omega_9 + 10\Omega_{10})$$

4. Das in k ambige Ideal $\sqrt{-47}$ spaltet sich in K in 5 verschiedene nicht ambige Primideale.

$$\sqrt{-47} = (A_0 - A_1)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_4)(A_4 - A_0)$$

Beweis: Nach den Bestimmungen in Kap. I sind die Produkte des 1. und 5., des 2. und 4. Faktors auf der rechten Seite reell, der mittlere rein imaginär, das Ganze also rein imaginär. Überdies ist das Produkt rechts die Norm eines jeden seiner Faktoren und als solche eine ganze Zahl aus k; es bildet aber auch ein Teiler der Quadratwurzel aus der Diskriminante $d(A)$, und 47 gestattet in k nur die Zerlegung $(47) = (\sqrt{-47})^2$.

Viertes Kapitel.

Klassenzahl und Einheiten.

§ 7.

Die Bestimmung der Anzahl Klassen, in die sich die Ideale eines algebraischen Körpers nach dem in der Einleitung erwähnten, oder noch schärferen Prinzipien verteilen, scheint an schwierige und tiefliegende Probleme der höhern Zahlentheorie gebunden zu sein. Dedekind[1]) hat diese Frage dadurch modifiziert, dass es ihm auf Grund funktionentheoretischer Überlegungen gelang, sie auf die Berechnung des Limes

$$\lim_{s=1} (s-1)\,\zeta(s)$$

zurückzuführen, wo $\zeta(s) = \sum_j \frac{1}{n(j)^s}$ und (j) alle Ideale des betreffenden Körpers durchläuft. Dieser Grenzwert konnte bis jetzt auch nur für die beiden am best bearbeiteten Gebiete: der Abelschen von Kummer[2]) und der relativ-Abelschen Zahlkörper von Fueter[3]) durchgeführt werden. Für den Fall, wie er hier vorliegt, dass man es mit einem Körper von Primzahlrelativgrad l zu tun hat, findet er für die Klassenanzahl H des Oberkörpers den Ausdruck:[4])

$$H = l\,\frac{W}{2R}\,\frac{\zeta}{\Pi}\sum^{(\mathfrak{a})}[\mathfrak{a}]\,lg\,\frac{\sqrt{A}}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}. \qquad \text{I}$$

Hierin soll W die Anzahl der in K vorkommenden Einheitswurzeln, $\mathfrak{a}$ ein System von Repräsentanten aus den Klassen von k, $[\mathfrak{a}]$ die

[1]) Zahlbericht S. 230. [2]) Zahlbericht S. 375. [3]) Fueter: 1. Rendi conti del Circolo matematico di Palermo, 1910, S. 380—395. 2. Jahresbericht der deutsch. Math. Vereinig. Bd. 20, S. 41. [4]) Fueter, l. c. pag. 394.

diesen Klassen zugeordnete Einheitswurzel $\zeta = e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{5}}$ $(n = 1, \ldots .5)$ bezeichnen. Sei $\mathfrak{a}$ gegeben in der Gestalt:

$$\mathfrak{a} = \left(A, \frac{B + \sqrt{d}}{2}\right),$$

so werden nur solche Idealbasen für I Verwendung finden, in denen $A > 0$, $B > 0$ und das Vorzeichen von $\sqrt{d}$ positiv ist. ω_1 und ω_2 sind dann die Grössen

$$\omega_1 = \frac{B + \sqrt{d}}{2A}, \quad \omega_2 = \frac{-B + \sqrt{d}}{2A}$$

und $\eta(\omega)$ wie gewohnt die sogenannte η-Funktion:

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 - q^{2\nu}).\ ^{1}) \qquad q = e^{\pi i \omega}$$

R bedeutet, wenn $\varepsilon_1 \ldots . \varepsilon_4$ ein System von Grundeinheiten darstellt, den Regulator von K, d. h. den Wert der Determinante[2])

$$\begin{vmatrix} lg\,\varepsilon_1 & lg\,\varepsilon_2 & lg\,\varepsilon_3 & lg\,\varepsilon_4 \\ lg\,\varepsilon_1' & lg\,\varepsilon_2' & lg\,\varepsilon_3' & lg\,\varepsilon_4' \\ lg\,\varepsilon_1'' & lg\,\varepsilon_2'' & lg\,\varepsilon_3'' & lg\,\varepsilon_4'' \\ lg\,\varepsilon_1''' & lg\,\varepsilon_2''' & lg\,\varepsilon_3''' & lg\,\varepsilon_4''' \end{vmatrix}$$

worin ε', ε'', ε''' die 3 ersten zu ε konjugierten Zahlen andeuten sollen. Theoretisch ist damit die Frage erledigt, indem man weiss, dass nach einer endlichen Anzahl von Schritten die Grundeinheiten sich auffinden lassen. Praktisch haftet Formel I insofern eine Unvollkommenheit an, als es im allgemeinen, wie schon in diesem Falle, rechnerisch eine Unmöglichkeit bedeutet, etwa auf dem Wege, auf dem man die Existenz der Grundeinheiten beweist, zu ihnen zu gelangen. Dieser Umstand macht es notwendig, in jedem einzelnen Fall besondere Untersuchungen über Grundeinheiten anzustellen.

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus einer der Nebenklassen von k, so bilden dessen 5 erste Potenzen ein Repräsentantensystem, und die Basiszahl B kann dann immer so bestimmt werden, dass

$$B^2 \quad d\ (p^l),$$

[1]) Weber III, S. 85. [2]) Zahlbericht S. 221.

wenn p diejenige Primzahl bezeichnet, deren einer Faktor $\mathfrak{p}$ ist. I gewinnt dadurch die einfache Form[1])

$$H = l^{\frac{J}{R} \cdot \frac{W}{2}} \qquad \text{II}$$

worin

$$J = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \begin{vmatrix} lg\,\varepsilon_1 & \dots & lg\,\varepsilon_4 \\ \vdots & & \vdots \\ lg\,\varepsilon_4 & \dots & lg\,\varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_\mu = \frac{\eta_1\left(\frac{B+\sqrt{d}}{2p^{u-1}}\right)\eta_1\left(\frac{-B+\sqrt{d}}{2p^{u-1}}\right)}{\eta_1\left(\frac{B+\sqrt{d}}{2p^{u}}\right)\eta_1\left(\frac{-B+\sqrt{d}}{2p^{u}}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\varepsilon_l = \frac{\eta_1\left(\frac{B+\sqrt{d}}{2p}\right)\eta_1\left(\frac{-B+\sqrt{d}}{2p}\right)}{\eta_1\left(\frac{B+\sqrt{d}}{2p^{l}}\right)\eta_1\left(\frac{-B+\sqrt{d}}{2p^{l}}\right)} \cdot p^{\frac{l-1}{2}}.$$

Die erstere dieser beiden Formeln verdient praktisch den Vorzug, trotz ihrer komplizierten Gestalt gegenüber II, indem für I die Repräsentanten einfacher gewählt werden können, als sie durch die Potenzen eines Primideals gegeben sind; denn es bringt rechnerisch grossen Vorteil, A möglichst klein wählen zu können, da hiervon die Teilung des Argumentes ω der η-Funktionen abhängt.

Das einfachste Repräsentantensystem liefern wohl die mit Ausnahme des Hauptideals in Kapitel II angeführten Ideale für die Klasse

$$J^1 \dots\dots \left(2, 1+\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = \left(2, \frac{3+\sqrt{-47}}{2}\right)$$

$$J^2 \dots\dots \left(3, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = \left(3, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)$$

$$J^3 \dots\dots \left(3, \frac{1-\sqrt{-47}}{2}\right) = \left(3, \frac{5+\sqrt{-47}}{2}\right)$$

$$J^4 \dots\dots \left(2, 1+\frac{1-\sqrt{-47}}{2}\right) = \left(2, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)$$

Transformation der Basis durch die lineare Substitution: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$

$$J^5 \dots\dots \left(12, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = \left(12, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right).$$

[1]) Fueter l. c. pag. 394. Es ist dort ein Druckfehler unterlaufen, indem der Ausdruck für ε_l nicht den Faktor $\frac{1}{\sqrt{p}}$, sondern $p^{\frac{l-1}{2}}$ hat.

Daraus folgen die Argumentwerte für

$$J \ldots\ldots \quad \omega_1 = \frac{3 + \sqrt{-47}}{4} \qquad \omega_2 = \frac{-3 + \sqrt{-47}}{4}$$

$$J^2 \ldots\ldots \quad \omega_1 = \frac{1 + \sqrt{-47}}{6} \qquad \omega_2 = \frac{-1 + \sqrt{-47}}{6}$$

$$J^3 \ldots\ldots \quad \omega_1 = \frac{5 + \sqrt{-47}}{6} \qquad \omega_2 = \frac{-5 + \sqrt{-47}}{6}$$

$$J^4 \ldots\ldots \quad \omega_1 = \frac{1 + \sqrt{-47}}{4} \qquad \omega_2 = \frac{-1 + \sqrt{-47}}{4}$$

$$J^5 \ldots\ldots \quad \omega_1 = \frac{1 + \sqrt{-47}}{24} \qquad \omega_2 = \frac{-1 + \sqrt{-47}}{24}$$

und die Zahl der Idealklassen in K birgt also der Ausdruck (wegen $d < 0$, $W = 2$)

$$H = \frac{5}{R}\,\Pi \left| lg \frac{2\sqrt{3}}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{47}}{24}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{24}\right)} + \right. \qquad \text{III}$$

$$- \zeta\, lg \frac{\sqrt{2}}{\eta\left(\frac{3+\sqrt{-47}}{4}\right)\eta\left(\frac{-3+\sqrt{-47}}{4}\right)} + \zeta^2 lg \frac{\sqrt{3}}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{6}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{6}\right)} +$$

$$- \zeta^3 lg \frac{\sqrt{3}}{\eta\left(\frac{5+\sqrt{-47}}{6}\right)\eta\left(\frac{-5+\sqrt{-47}}{6}\right)} + \zeta^4 lg \left. \frac{\sqrt{2}}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right)} \right].$$

Das nächste Ziel bildet die Berechnung der η-Funktionen für die bezüglichen Argumente. Diese Funktionen sind im allgemeinen transcendenter Natur; hingegen zeigen ihre Quotienten für gewisse Argumentwerte algebr. Charakter und für solche ist die Theorie entwickelt. Zur Wertbestimmung des Produktes Π in III, d. h. der Norm des Klammerausdruckes in bezug auf ζ bedarf es übrigens der expliziten Kenntnis der η-Werte auch nicht, in dem ja nur der Log. naturalis dieser Grössen auftritt.

Sei etwa von der Zahl

$$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4$$

die Norm bezüglich ζ zu bilden, so ist ihr Wert, vom Zeichen abgesehen, bekanntlich gegeben durch die Determinante:

$$\Delta = \begin{matrix} a_0 - a_1 & a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 \\ a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 & a_4 - a_0 \\ a_2 - a_3 & a_3 - a_4 & a_4 - a_0 & a_0 - a_1 \\ a_3 - a_4 & a_4 - a_0 & a_0 - a_1 & a_1 - a_2 \end{matrix}.$$

Setzt man

$$u_0 = \begin{matrix} 2\sqrt{3} & \eta\left(\frac{3+\sqrt{-47}}{4}\right)\eta\left(\frac{-3+\sqrt{-47}}{4}\right) \\ \sqrt{2} & \eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{24}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{24}\right) \end{matrix}$$

$$u_1 = \begin{matrix} \sqrt{2} & \eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{6}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{6}\right) \\ \sqrt{3} & \eta\left(\frac{3+\sqrt{-47}}{4}\right)\eta\left(\frac{-3+\sqrt{-47}}{4}\right) \end{matrix}$$

$$u_2 = \begin{matrix} \sqrt{3} & \eta\left(\frac{5+\sqrt{-47}}{4}\right)\eta\left(\frac{-5+\sqrt{-47}}{4}\right) \\ \sqrt{3} & \eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{6}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{6}\right) \end{matrix}$$

$$u_3 = \begin{matrix} \sqrt{3} & \eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right) \\ \sqrt{2} & \eta\left(\frac{5+\sqrt{-47}}{6}\right)\eta\left(\frac{-5+\sqrt{-47}}{6}\right) \end{matrix}$$

$$u_4 = \begin{matrix} \sqrt{2} & \eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{24}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{24}\right) \\ 2\sqrt{3} & \eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right) \end{matrix},$$

so ist leicht zu erkennen, dass die Werte der u's zur Berechnung des Produktes Π genügen, und zwar ist ungeachtet des Zeichens

$$\Delta_1 = \overset{\zeta}{H} \left| lg \frac{2\sqrt{3}}{\eta(\ ).\eta(\ )} + \ldots\ldots \right| = \begin{matrix} lg\ u_0 & lg\ u_1 & lg\ u_2 & lg\ u_3 \\ lg\ u_1 & lg\ u_2 & lg\ u_3 & lg\ u_4 \\ lg\ u_2 & lg\ u_3 & lg\ u_4 & lg\ u_0 \\ lg\ u_3 & lg\ u_4 & lg\ u_0 & lg\ u_1 \end{matrix} \quad \text{IV}$$

Darnach erhält III die einfache Gestalt wie II:

$$H = \frac{5}{R} \cdot \Delta_1 \,. \qquad \text{III}^{a})$$

Die Quotienten u, wie sie sich oben dargestellt finden, lassen sich bei Anwendung der linearen Substitution $(\omega, 1 + \omega)$ auf die Argumentwerte ganz bedeutend vereinfachen; unsere η's erfahren dabei die Veränderungen:

$$\eta\left(\frac{-\varepsilon . 3 + \sqrt{-47}}{4}\right) = \eta\left(\frac{-\varepsilon . 3 + \sqrt{-47}}{4} + \varepsilon\right) e^{\frac{-\varepsilon\pi i}{12}} = \eta\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{-47}}{4}\right) e^{\frac{-\varepsilon\pi i}{12}}$$

$$\eta\left(\frac{-\varepsilon . 5 + \sqrt{-47}}{6}\right) = \eta\left(\frac{-\varepsilon . 5 + \sqrt{-47}}{4} + \varepsilon\right) e^{\frac{-\varepsilon\pi i}{12}} = \eta\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{-47}}{6}\right) e^{\frac{-\varepsilon\pi i}{12}},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$. Dies berücksichtigend, führt uns dank der günstigen Wahl in den Idealen $\mathfrak{a}$ sofort zu den neuen Quotienten

$$u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right) \eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right)}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{24}\right) \eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{24}\right)}$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{6}\right) \eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{6}\right)}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right) \eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right)} \qquad \text{V}$$

$$u_2 = 1$$

$$u_3 = \frac{1}{u_1}$$

$$u_4 = \frac{1}{u_0}.$$

[1]) Weber III, S. 113.

Zur bequemen Berechnung der beiden noch übrig bleibenden u_0 und u_1 wird es vorteilhaft erscheinen, eine neue Funktion[1])

$$f_1 = \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)}$$

einzuführen und die Quotienten zu erweitern:

V a)

$$u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right)\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{8}\right)}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)\eta\left(\frac{-2+\sqrt{-47}}{8}\right)\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{3.8}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{3.8}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} f_1\left(\frac{+1+\sqrt{-47}}{4}\right)^{-1} f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right)^{-1} \frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{8}\right)}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{3.8}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{3.8}\right)}$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2.3}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2.3}\right)}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)} \cdot f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)^{-1} \cdot f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)^{-1}.$$

Damit sind die u's auf eine Form gebracht worden, welche sie der algebraischen Auswertung fähig macht.

§ 8.

Den Ausgangspunkt hierfür bildet die berechnete Grösse

$$f(\sqrt{-47}) = \sqrt{2}\, A_0\ ^2)$$

wobei $$f(\sqrt{-47}) = e^{\frac{-\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)}{\eta(\sqrt{-47})} = e^{\frac{-\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)}\ ^3)$$

und den Uebergang von $f(\omega)$ zu $f_1(\omega)$ vermittelt die Beziehung

[1]) Weber III, pag. 114. [2]) Weber III, S. 486. [3]) Weber III, S. 114.

$$f_1(1+\sqrt{-47}) = e^{\frac{\pi i}{24}} f(\sqrt{-47}) = e^{\frac{-\pi i}{24}} \sqrt{2}\, A_0.$$ [1])

Das erste verwendbare Resultat $f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)$ wird durch Halbieren des Argumentes $\omega = 1 + \sqrt{-47}$, also durch die Lösung einer quadratischen Gleichung und zwar, wenn

$$f_1(1+\sqrt{-47})^8 = B = e^{\frac{-\pi i}{3}} 2^4 A_0^8 \qquad 1)$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = f$$

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = f_1,$$

durch Auflösen von

$$2B = f^4 \left(f^{12} + \sqrt{f^{24} - 64}\right)$$ [2])

$$2B = f_1^4 \left(f_1^{12} + \sqrt{f_1^{24} + 64}\right)$$ [3])

nach den Unbekannten f und f_1. So ergeben sich die Werte

$$f^8 = \frac{8}{B} + \sqrt{\frac{64}{B^2} + B} \qquad f_1^8 = -\frac{8}{B} + \sqrt{\frac{64}{B^2} + B}. \qquad 1^a)$$

Die Frage betreff Zeichen — denn f wie f_1 ist einwertig — entscheidet am einfachsten die Produktenentwicklung der f_1-Funktion[4])

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)^8 = e^{\frac{\pi\sqrt{47}}{6} - \pi i} e^{\frac{-\pi\sqrt{47}}{6}} \left(1 - e^{\frac{-\pi\sqrt{47}}{2} + \pi i}\right)^8 \left(1 - e^{-\pi\sqrt{47} + \pi i}\right)^8$$

$$= e^{\frac{\pi\sqrt{47}}{6} - \pi i} e^{\frac{-\pi\sqrt{47}}{6}} \left(1 + \varepsilon\right)$$

[1]) Weber III, S. 114.
[2]) Weber III, S. 476.
[3]) Ich füge hier wie im folgenden gleichzeitig auch die Beziehung von B zu f bei, da wir den Wert von f zur Dreiteilung des Argumentes gebrauchen werden.
[4]) Weber III, S. 86.

(ε = kleine zu vernachlässigende Grösse). Andererseits findet man nach Einsetzen des Wertes für B in 1[a])

$$f_1^8 = \begin{matrix} 8 \\ -\pi i \\ e^{\ 3}\, 2^4 A_0^8 \end{matrix} + \sqrt{\begin{matrix} 64 \\ -2\pi i \\ e^{\ 3}\, 2^8 A_0^{16} \end{matrix}} + e^{\frac{-\pi i}{3}} 2^4 A_0^8$$

$$= e^{\frac{-2\pi i}{3}} \left(1 + \frac{\sqrt{1 - 2^6 A_0^{24}}}{2 A_0^8}\right).$$

Also kommt, da $A_0 > 1$, nur das positive Zeichen in betracht, was natürlich auch für f gilt. Wir erhalten somit

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)^8 = e^{\frac{-2\pi i}{3}} \left(\frac{1+\sqrt{1-2^6 A_0^{24}}}{2 A_0^8}\right)$$

und dementsprechend

$$f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)^8 = e^{\frac{-2\pi i}{3}} \left(\frac{1-\sqrt{1-2^6 A_0^{24}}}{2 A_0^8}\right).$$

Ihre Multiplikation führt zum gesuchten Werte

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)^8 f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)^8 = 2^4 A_0^8 \qquad 2)$$

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right) = \sqrt{2}\, A_0.$$

In analoger Weise vollzieht sich die Halbierung des neuen Argumentes $\frac{1+\sqrt{-47}}{2}$. Sei wieder

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = B = e^{\frac{-2\pi i}{3}} \frac{1+\sqrt{1-2^6 A_0^{24}}}{2 A_0^8} \qquad 2^a)$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right) = f$$

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right) = f_1,$$

so ergeben dieselben Ueberlegungen:

$$f\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)^8 = \frac{8}{B} + \sqrt{\frac{64}{B^2} + B} \qquad 2^b)$$

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)^8 = -\frac{8}{B} + \sqrt{\frac{64}{B^2} + B}$$

oder nach Substitution des oben gefundenen algeb. Wertes B 3)

$$f_1^8 = -\frac{2^3 \cdot 2A_0^8}{1+\sqrt{1-2^6 A_0^{24}}} e^{\frac{2\pi i}{3}} + \sqrt{\frac{2^8 A_0^{16} e^{\frac{4\pi i}{3}}}{1+\sqrt{1-2^6 A_0^{24}}} + \frac{1+\sqrt{1-2^6 A_0^{24}}}{2A_0^8} e^{-\frac{2\pi i}{3}}}$$

$$= e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{1}{2^6 A_0^{24}} \left(-2^4 A_0^8 + 2^4 A_0^8 \sqrt{1-2^6 A_0^{24}} + \right.$$

$$\left. + 2^4 A_0^8 \sqrt{2 - 2^6 A_0^{24} - 2\sqrt{1-2^6 A_0^{24}} + 2^3 A_0^{24} + 2^3 A_0^{24} \sqrt{1-2^6 A_0^{24}}}\right)$$

$$= e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{1}{2^2 A_0^{16}} \left(-1 + \sqrt{1-2^6 A_0^{24}} + \right.$$

$$\left. + \left| (1+2A_0^{12})\sqrt{1-2^3 A_0^{12}} - (1-2A_0^{12})\sqrt{1+2^3 A_0^{12}} \right| \right).$$

Auch hier gibt die Produktentwicklung Aufschluss darüber, welches Zeichen zu wählen sei:

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)^8 = e^{-\frac{\pi i}{12}} e^{\frac{\pi\sqrt{47}}{12}} \left(1 - 8 e^{\frac{\pi i}{4}} e^{-\frac{\pi\sqrt{47}}{4}} + \ldots\ldots\right)$$

$$\ldots\ldots = e^{-\frac{\pi i}{12}} e^{\frac{\pi\sqrt{47}}{12}} (1-\varepsilon) = a - bi. \qquad 3^a)$$

Eine leichte Abschätzung der Grössen in 3) zeigt, dass nur dann zwischen 3) und 3ª) Identität besteht, wenn das negative Zeichen genommen wird, d. h.

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)^8 = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2^2 A_0^{16}}\left(-1+\sqrt{1-2^6 A_0^{24}}-(1+2A_0^{12})\sqrt{1-2^3 A_0^{12}}+\right.$$

$$\left.+(1-2A_0^{12})\sqrt{1+2^3 A_0^{12}}\right)$$

und entsprechend

$$f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right)^8 = \frac{e^{\frac{-2\pi i}{3}}}{2^2 A_0^{16}}\left(-1-\sqrt{1-2^6 A_0^{24}}+(1+2A_0^{12})\sqrt{1-2^3 A_0^{12}}+\right.$$

$$\left.+(1-2A_0^{12})\sqrt{1+2^3 A_0^{12}}\right).$$

Das Produkt dieser beiden konjug. imag. Zahlen erhält schliesslich die Form

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)\cdot f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}A_0^4}\sqrt[8]{2^2 A_0^{12}\left(2^4 A_0^{12}+2+2^4 A_0^{24}-2(2+2^2 A_0^{12})\sqrt{1+2^3 A_0^{12}}\right)}$$

$$= \frac{1}{A_0^2}\sqrt{\frac{-1-\sqrt{1+2^3 A_0^{12}}}{2A_0}}.$$

Die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen sind Quadrate ganzer Zahlen in K, welche sich nach einer leicht aufzustellenden Versuchsmethode, bestehend aus Kongruenzen nach dem Modul 2, sicher finden lassen. Man gelangt so zum definitiven Wert

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)\cdot f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{4}\right) = (A_0^4-A_0^3-A_0-1)\sqrt{2} \qquad 4)$$

§ 9.

Wie aus V[a]) zu ersehen ist, machen es die u's nötig, eine Dreiteilung des Argumentes vorzunehmen und eine solche Operation zieht schon ganz beträchtliche Rechnungen nach sich. Die Hilfsmittel hierzu liefern die Multiplikatorgleichungen erster Stufe[1]), indem die 4 Funktionen

[1]) Weber III, S. 248.

$$x_0 = 27 \left(\frac{\eta\,(3\,\omega)}{\eta\,(\omega)} \right)^6$$

$$x_1 = - \left(\frac{\eta\left(\frac{\omega}{3}\right)}{\eta\,(\omega)} \right)^6$$

$$x_2 = - \left(\frac{\eta\left(\frac{4+\omega}{3}\right)}{\eta\,(\omega)} \right)^6$$

$$x_3 = - \left(\frac{\eta\left(\frac{8+\omega}{3}\right)}{\eta\,(\omega)} \right)^6$$

der Gleichung:[1])

$$x^4 + 18\,x^2 + \gamma_3\,x - 27 = 0 \qquad \text{VI}$$

genügen, worin $\gamma_3 = \gamma_3\,(\omega)$ die Klasseninvariante[2]) $\gamma_3 = \sqrt{j\,(\omega) - 12^3}$ und $j(\omega)$ wieder die Invariante der elliptischen Modulfunktionen darstellen soll. Ihre Wurzel x_1 wird uns dann den Wert für $\frac{\eta\left(\frac{\omega}{3}\right)}{\eta\,(\omega)}$ ergeben. Führt man die Auflösung von VI durch, etwa nach Eulers Methode[3]), so erreichen die x eine Darstellung von der Form

$$2x = + u + v + w$$

in der

$$u = \sqrt{-12 + \sqrt[3]{12^3 + \gamma_3^2}} \qquad \text{VII}$$

$$v = \sqrt{-12 + e^{\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{12^3 + \gamma_3^2}}$$

$$w = \sqrt{-12 + e^{\frac{4\pi i}{3}} \sqrt[3]{12^3 + \gamma_3^2}}.$$

[1]) Weber III, S. 251.
[2]) Weber III, S. 179.
[3]) Weber I, S. 136.

Wird statt $\gamma_3(\omega)$ eine andere Klasseninvariante[1]) $\gamma_2(\omega)$ in die letzten Ausdrücke eingeführt, die von $j(\omega)$ und $\gamma_3(\omega)$ in folgender Weise abhängt:

$$\gamma_2(\omega) = \sqrt[3]{j(\omega)},\ \gamma_2(\omega)^3 = 12^3 + \gamma_3(\omega)^2,$$

so lauten diese:

$$u = \sqrt{-12 + \gamma_2(\omega)}$$

$$v = \sqrt{-12 + e^{\frac{2\pi i}{3}}\,\gamma_2(\omega)}$$

$$w = \sqrt{-12 + e^{\frac{4\pi i}{3}}\,\gamma_2(\omega)}$$

und alles wird nun davon abhängen, γ_2 berechnen zu können.

γ_2, γ_3, f_1, f entspringen derselben Wurzel, der Invarianten $j(\omega)^2$). Aber für die Argumente $\sqrt{-47}$, $\frac{1+\sqrt{-47}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{-47}}{4}$ kennen wir bereits die Funktionswerte von g und f_1, gesucht werden diejenigen für γ_2. Wir sind also auf Beziehungen zwischen γ_2 und f, f_1 angewiesen und solche sind bekannt.

$$\gamma_2(\omega) = f(\omega)^8\ f_1(\omega)^8 + f(\omega)^8\ f_2(\omega)^8 - f_1(\omega)^8\ f_2(\omega)^8\ ^3)$$

oder da $f_2(\omega)^8 = f(\omega)^8 - f_1(\omega)^8\ ^4)$

$$\gamma_2(\omega) = f(\omega)^{16} + f_1(\omega)^{16} - f_1(\omega)^8\ f(\omega)^8.$$

Letztere Relation gestattet, unter Zuhilfenahme der in 1), 1a) gefundenen Werte, als erstes $\gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)$ zu berechnen:

$$\gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = 3 \cdot \frac{2^6}{B^2} + \frac{2^6}{B^2} + B - \frac{2^8}{B^2} \cdot B$$

oder nach 2a)

$$\gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = e^{\frac{-\pi i}{3}}\left(\frac{-1}{{A_0}^{16}}\right) + 2^4\,{A_0}^8.$$

[1]) Weber III, S. 179. [2]) Weber III, l. c. [3]) Weber III, l. c. [4]) Weber III, S. 114.

Wie in VII durch die beiden Zeichen angedeutet wurde, sind die Wurzeln von VI durch den dortigen Ausdruck noch keineswegs festgelegt. Erst die folgende Bedingung[1])

$$u \cdot v \cdot w = \cdot \cdot \gamma_3(\omega),$$

die u, v, w erfüllen müssen, damit VII die Nullwerte darstellt, wird dies nachholen. Definiert $\varphi^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\Theta}{n}}$ den Ausdruck $\sqrt[n]{\varphi}\, e^{i\Theta}$, so gibt eine rohe Abschätzung

$$\begin{aligned} u &= 2^2 A_0^4 e^{\frac{-\pi i}{6}} + \varepsilon_1 \\ v &= 2^2 A_0^4 e^{\frac{\pi i}{6}} + \varepsilon_2 \\ w &= 2^2 A_0^4 e^{\frac{\pi i}{2}} + \varepsilon_3 \end{aligned} \qquad 5^a)$$

$$\gamma_3\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right) = \sqrt{-12^3 + \gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)^3} = 2^6 A_0^{12} e^{\frac{\pi i}{2}} + \varepsilon_4.$$

worin die ε's kleine zu vernachlässigende Grössen bezeichnen. Man erkennt hieraus leicht, dass nur die 4 Kombinationen:

$$\begin{aligned} 2x_0' &= u - v + w \\ 2x_1' &= -u + v + w \\ 2x_2' &= -u - v - w \\ 2x_3' &= u + v - w \end{aligned}$$

zulässig sind, also dies System die Wurzeln von VI bedeutet. Wie wir oben bereits hervorhoben, ist für das Folgende nur die eine Wurzel x von Belang. Ihr algebraischer Wert ergibt sich aus der Identifizierung der x mit den x'. Es würde dies zwar einen Grenzprozess benötigen, der sich aber infolge des Umstandes, dass sich die x wie x' numerisch beliebig genau berechnen lassen, umgehen lässt. Die so erhaltenen Werte streben nämlich dem Grenzwerte x', gegeben als

[1]) Weber I, S. 136.

algebr. Ausdruck von A_0 assymtotisch zu und eine gewisse annährende Kenntnis von x_1 und der x' genügt also vollständig zur bezügl. Gleichsetzung.

Aus der Summenentwicklung der η-Fuktionen[1])

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \sum_{-\infty,\,\infty}^{\nu} (-1)^{\nu} q^{3\nu^2+\nu} \qquad q = e^{\pi i \omega}$$

$$\eta(\omega)^6 = q^{\frac{1}{2}}(1 - 6q^2 + 9q^4 + 10q^6 + 30q^8 - 6q^{10} + 35q^{12} + \cdots\cdots)$$

folgt

$$\frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{6}\right)}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)} = \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{47}}{12}+\frac{\pi i}{12}}\left(1-6e^{-\frac{\pi\sqrt{47}}{3}+\frac{\pi i}{3}}+\cdots\right)}{e^{-\frac{\pi\sqrt{47}}{4}+\frac{\pi i}{4}}\left(1-\cdots\cdots\right)} =$$

$$= e^{\frac{\pi\sqrt{47}}{6}} e^{\frac{4\pi i}{6}}(1+\varepsilon).$$

Dieses letzte Resultat führt unter Berücksichtigung von 5) sofort zur Erkenntnis

$$2x_1 = u - v + w = 2x'_0.$$

Ganz entsprechend wird sich der zu x_1 konjugiert komplexe Wert gestalten:

$$y_1 = -\left(\frac{\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{6}\right)}{\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)}\right)^6$$

$$2y_1 = u' + v' + w',$$

wenn

$$u' = \sqrt{12 \cdot \gamma_2\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)}$$

[1]) Weber III, S. 112.

$$v' = \sqrt{-12 + e^{-\frac{2\pi i}{3}} \gamma_2\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)}$$

$$w' = \sqrt{-12 + e^{-\frac{4\pi i}{3}} \gamma_2\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)}$$

$$\gamma_2\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{3}}\left(\frac{-1}{A_0^{16}} + 2^4 A_0^8\right).$$

Aus dem Vergleiche von u, v, w mit u', v', w' folgt

$$u' = -v \qquad v' = u \qquad u' = w$$

und wir erhalten schliesslich

$$2x_1 \cdot 2y_1 = 4 \cdot \frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{6}\right)^6 \eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{6}\right)^6}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)^6 \eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)^6} = u^2 + v^2 + w^2 - 2w \qquad 6)$$

$$= -12 + 2\left|\frac{-1}{A_0^{16}} + 2^4 A_0^8 + 2\sqrt{144 - 12\left(\frac{-1}{A_0^{16}} + 2^4 A_0^8\right) + \left(\frac{-1+2^4 A_0^8}{A_0^{16}}\right)^2}\right|$$

$$= 2(27 A_0 + 81 A_0^2 + 54 A_0^3 + 81 A_0^4)$$

$$\frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{6}\right)\eta\left(\frac{1+\sqrt{-17}}{6}\right)}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{2}\right)} = \sqrt{3}\ (1 + A_0 + A_0^2 + A_0^3 - A_0^4),$$

welcher Wert endlich erlaubt, das eine der u's, u_1, zu berechnen, und zwar ergibt sich nach V[a]) 2) 6)

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{3}(1 + A_0 + A_0^2 + A_0^3 - A_0^4)}{\sqrt{3}\ \sqrt{2}\qquad\qquad A_0} \qquad 7)$$

$$= -1 - A_0 - A_0^3 + A_0^4.$$

Es erübrigt noch die Bestimmung des algebr. Ausdruckes für den Quotienten

$$\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{24}\right),$$
$$\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)$$

der auf gleiche Art wie der analoge

$$\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{6}\right)$$
$$\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)$$

gewonnen wird. Sei

$$x_1 = -\frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{24}\right)^6}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)^6}$$

so haben wir gesehen, genügt diese Grösse der Gleichung

$$x^4 + 18x^2 + \gamma_3\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)x - 27 = 0,$$

deren Auflösung die Wurzeln in der Form

$$2x' = +u+v+w$$

darbietet, wenn darin

$$u = \sqrt{-12 + \gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)}$$

$$v = \sqrt{-12 + e^{\frac{2\pi i}{3}}\gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)}$$

$$w = \sqrt{-12 + e^{\frac{4\pi i}{3}}\gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)}$$

und

$$uvw = -\gamma_3\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)$$

gesetzt wird. Bezeichnet B die Grösse $f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)^8$ so gestattet, wie wir oben sahen, γ_2 eine Darstellung durch B:

$$\gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)^8 = \frac{2^8}{B^2} + B.$$

Für dieses B fanden wir bereits auf Seite 50 einen irrationalen Ausdruck in A_0, der sich aber, wie dort bereits angedeutet wurde, in einen rationalen in A_0 umformen lässt:

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{4}\right)^8 = e^{\frac{2\pi i}{3}}\Big|-12+\frac{47}{2}A_0-\frac{9}{2}A_0^2-15A_0^3+$$
$$+\frac{31}{2}A_0^4+\left(116+\frac{121}{2}A_0+\frac{175}{2}A_0^2-7A_0^3-\frac{105}{2}A_0^4\right)\frac{\sqrt{-47}}{47}\Big|$$

und durch etwas Rechnung gelangt man für γ_2 zum Werte:

$$\gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right) = e^{\frac{2\pi i}{3}}5\Big|5+74A_0+\frac{217}{2}A_0^2+\frac{23}{2}A_0^3-\frac{115}{2}A_0^4-$$
$$-\left(389+677A_0+\frac{219}{2}A_0^2-\frac{773}{2}A_0^3+\frac{31}{2}A_0^4\right)\frac{\sqrt{-47}}{47}\Big|.$$

Wir können nunmehr dazu übergehen, die x' festzulegen, d. h. die Vorzeichen der u, v, w zu bestimmen, und es wird dies wie oben ganz einfach mit approximativen Mitteln zu erreichen sein. Man findet

$$\gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right) - 12\,.\,e^{\frac{2\pi i}{3}}e^{\frac{25\pi i}{18}} = 12\,.\,e^{\frac{37\pi i}{18}} + \varepsilon_1$$

$$-\gamma_3\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right) = -\sqrt{-12^3+\gamma_2^3} = -12\sqrt[3]{-1+e^{\frac{37\pi i}{6}}} + \varepsilon_2$$

$$u = 2\sqrt{3}\sqrt[3]{1+e^{\frac{37\pi i}{18}}} + \varepsilon_3$$

$$v = 2\sqrt{3}\sqrt{1 + e^{\frac{49\pi i}{18}}} + \varepsilon_4$$

$$w = 2\sqrt{3}\sqrt{-1 - e^{\frac{61\pi i}{18}}} + \varepsilon_5$$

und daraus folgen nach 5) als zulässige Wertekombinationen

$$\begin{aligned} 2x_0' &= u + v + w \\ 2x_1' &= -u - v + w \\ 2x_2' &= -u + v - w \\ 2x_3' &= -u - v - w. \end{aligned}$$

Da ferner

$$x_1 = -\frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{24}\right)^6}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)^6} = \frac{e^{\frac{\pi i}{48} - \frac{\pi\sqrt{47}}{48}}\left(1 - 6e^{\frac{\pi i}{12} - \frac{\pi\sqrt{47}}{12}} + 9e^{\frac{\pi i}{6} - \frac{\pi\sqrt{47}}{6}} + \ldots\right)\ldots}{e^{\frac{\pi i}{16} - \frac{\pi\sqrt{47}}{16}}\left(1 - 6e^{\frac{\pi i}{4} - \frac{\pi\sqrt{47}}{4}} + \ldots\ldots\right)\ldots\ldots}$$

$$= e^{\frac{-\pi i}{24} - \frac{\pi\sqrt{47}}{24}}\left(1 - e^{\frac{\pi i}{12}} + 0{,}2e^{\frac{\pi i}{6}} - \ldots\right) = \rho \cdot e^{\frac{18\pi i}{24}} + \varepsilon,$$

führt eine leichter Vergleich zwischen x_1 und den x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 zur Identität

$$x_1 = x'_2 = \frac{1}{2}(-u + v - w).$$

Daraus folgt ohne Rechnung der Funktionswert für den η-Quotienten bei negativem Reellteil:

$$y_1 = \frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{24}\right)^6}{\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{8}\right)^6} = \frac{1}{2}\left(-u' + v' - w'\right)$$

wenn $u' = \sqrt{-12 + \gamma_2\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{8}\right)}$

$$v' = \sqrt{-12 + e^{\frac{-2\pi i}{3}}}\, \gamma_2\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{8}\right)$$

$$w' = \sqrt{-12 + e^{\frac{-4\pi i}{3}}}\, \gamma_2\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{8}\right)$$

$$\gamma_2\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{8}\right) = e^{\frac{-2\pi i}{3}} 5 \Big| 5 + 74 A_0 + \frac{217}{2} A_0^2 + \frac{23}{2} A_0^3 -$$

$$- \frac{115}{2} A_0^4 + \left(389 + 677 A_0 + \frac{219}{2} A_0^2 - \frac{773}{2} A_0^3 + \frac{31}{2} A_0^4\right) \sqrt{-47} \Big|.$$

Aus den beiden Ausdrücken für $\gamma_2\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)$ und $\gamma_2\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{8}\right)$ lässt sich schon erkennen, dass die algebr. Darstellung des Produktes $x_1 . y_1$ zu ganz ansehnlichen Rechnungen führen wird. Sie werden sich aber mittels einer wie oben (S. 50) angeführten Methode noch verhältnismässig einfach bewältigen lassen. Man gelangt so zum Endergebnis

$$x_1 y_1 = \frac{1}{4} (-u + v - w)(-u' + v' - w')$$

$$= -4 . 3^3 - 8 . 3^3 A_0 - 4 . 3^3 A_0^2 + 4 . 3^3 A_0^3 + 3^3 A_0^4$$

$$\frac{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{24}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{24}\right)}{\eta\left(\frac{1+\sqrt{-47}}{8}\right)\eta\left(\frac{-1+\sqrt{-47}}{8}\right)} = \sqrt[6]{x_1 y_1} = \sqrt{3}(1 + A_0 + A_0^2 - A_0^3). \qquad 8)$$

Damit ist uns das letzte nötige Mittel gegeben, u_0 in seinen algebr. Ausdruck zu kleiden. Es folgt aus V[a]) 4) und 8)

$$u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{(A_0^4 - A_0^3 - A_0 - 1)\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + A_0 + A_0^2 + A_0^3} = A_0. \qquad 9)$$

Die einfachen Resultate 7) und 9) lassen vermuten, die Zahlen u_0 und u_1 seien direkt aus der Hauptgleichung zu gewinnen,

§ 10.

Um die Berechnung von H, der Klassenanzahl zum Abschluss bringen zu können, bedürfen wir der sogenannten Grundeinheiten von K. Es hat bekanntlich Dirichlet[1]) ganz allgemein die Existenz von einer endlichen Anzahl solcher Einheiten, die den übrigen zur Basis dienen, dargetan. Für unsern Bereich, der als Galoisscher alle seine Konjugierten durch sich selbst definiert, heisst der Satz:

Die zu K konjugierten Körper sind sämtlich paarweise zu einander konjugiert imaginär. Also gibt es in ihm ein System von $\frac{10}{2} - 1 = 4$ Einheiten ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 von der Beschaffenheit, dass jede vorhandene Einheit ε des Körpers auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt

$$\varepsilon = \rho\, \varepsilon_1^{a_1} \varepsilon_2^{a_2} \varepsilon_3^{a_3} \varepsilon_4^{a_4}$$

dargestellt werden kann, wo $a_1 \ldots a_4$ ganze rationale Zahlen sind und wo ρ eine der in K vorkommenden Einheitswurzeln ± 1 bedeutet.

Solche Systeme fliessen in einfacher Weise aus den oben berechneten algebraischen Grössen u_0 und u_1.

Satz I: Die 4 zu u_0 und u_1 konjugierten Zahlen

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_1 = A_1 & \text{I} & \varepsilon_1' = -1 - A_1 - A_1^3 + A_1^4 & \text{I}' \\ \varepsilon_2 = A_2 & & \varepsilon_2' = -1 - A_2 - A_2^3 + A_2^4 & \\ \varepsilon_3 = A_3 & & \varepsilon_3' = -1 - A_3 - A_3^3 + A_3^4 & \\ \varepsilon_4 = A_4 & & \varepsilon_4' = -1 - A_4 - A_4^3 + A_4^4 & \end{array}$$

bilden jeweilen ein System von Grundeinheiten in K.

Wir beweisen die Behauptung für das einfachere System I und werden dann zeigen, dass I′ ein äquivalentes ist.

Vorerst sei bemerkt, dass u_0 wie u_1 wirklich Einheiten in K darstellen, indem

$$n(A_0) = 1$$
$$n(-1 - A_0 - A_0^3 + A_0^4) = 1 \qquad \text{wird.}$$

Damit nun weiterhin I der Behauptung genüge, ist die Unabhängigkeit der A_1, A_2, A_3, A_4 notwendige, wenn auch nicht hinreichende Bedingung, d. h. ihre logaritmische Determinante[2])

[1]) Zahlbericht S. 214. [2]) Zahlbericht S. 218.

$$\Delta = \begin{vmatrix} lg\ A_1 & lg\ A_2 & lg\ A_3 & lg\ A_4 \\ lg\ A_2 & lg\ A_3 & lg\ A_4 & lg\ A_0 \\ lg\ A_3 & lg\ A_4 & lg\ A_0 & lg\ A_1 \\ lg\ A_4 & lg\ A_0 & lg\ A_1 & lg\ A_2 \end{vmatrix} \qquad \text{II}$$

muss von Null verschieden ausfallen. Eine solche Determinante entsteht aus der ersten Horizontalreihe $A_1 \ldots A_4$, indem man die übrigen durch dieselbe Substitution auseinander hervorgehen lässt und den Logarithmus nat. der absoluten Beträge von A, $lg\ |A|$, in Rechnung bringt. Ihre Wertbestimmung mit 6-stelligen Log.-Tafeln führt zu

$$\Delta = 0{,}038482 + \varepsilon.$$

Wir haben es also tatsächlich in I mit einem Systeme von durch einander nicht darstellbaren Einheiten zu tun.

Um zu zeigen, dass es sogar Grundeinheiten sind, benützen wir den Umstand, dass der Betrag von Δ ein Minimum unter allen aus Systemen von unabhängigen Einheiten so gebildeter Determinanten Δ' darstellt. Auch der Regulator R, wie er in § 1 definiert wurde, ist eine solche Determinante, und zwischen R und Δ' besteht der innige Zusammenhang [1])

$$\Delta' = a.R, \qquad \text{III}$$

wo a stets eine ganze rationale Zahl ist. Für $a = 1$ wird $\Delta' = R$ d. h. die Einheiten, die zu Δ' Anlass gaben, sind zugleich Grundeinheiten. Es mangelt also bloss der Nachweis, dass Δ wirklich ein Minimum unter allen Δ' darstellt, und die Behauptung ist vollständig erwiesen.

Zu diesem Ende nehmen wir $\Delta' = \Delta$ setzend zuerst in dem Ausdrucke für H in III[a] § 7 eine formale Veränderung vor, schätzen dann die Klassenanzahl ab und gelangen so zu einer obern Grenze für a.

Wir erreichten in III[a] § 7 bereits den Ausdruck

$$H = \frac{5}{R}.\Delta_1$$

der sich nach Substitution von $R.a = \Delta$ in den andern

[1]) Zahlbericht S. 221.

$$H = 5 \cdot a \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad \text{IV}$$

umformen lässt. Also wird es sich zunächst darum handeln, den Quotienten $\frac{\Delta'}{\Delta}$ zu berechnen.

Nach den Resultaten IV § 1, 7) und 9) § 3 lautet die definitive Darstellung von Δ_1

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} lg\,A_0, & lg(1 + A_0 + A_0^3 + A_0^4), & 0, & lg(1 + A_0 - A_0^3 + A_0^4), \\ lg(1 - A_0 + A_0^3 + A_0^4), & 0, & lg(-1 + A_0 + A_0^3 + A_0^4), & lg\,A_0, \\ 0, & lg(1 + A_0 + A_0^3 + A_0^4), & lg\,A_0, & lg\,A_0, \\ lg(-1 + A_0 - A_0^3 + A_0^4), & lg\,A_0, & lg\,A_0, & lg(1 + A_0 + A_0^3 + A_0^4). \end{vmatrix}$$

Ebenso wird sich die Determinante Δ' ausdrücken lassen; denn die Quadrate der absoluten Beträge der Einheiten A werden als Produkt zweier ganzen Zahlen in K erhalten und da sie reell sind, liegen sie auch im Unterkörper k (A_0), d. h., sie gehen nach Kapitel II, § 3, aus einer ganzen rationalen Funktion von A_0 mit ganzen rationalen Koeffizienten hervor. Gestützt auf die Substitution 8) Kapitel I ergibt sich

$$A_1^2 = A_4^2 = 1 + 2A_0 + A_0^3 - A_0^4,$$
$$A_2^2 = A_3^2 = A_0 + A_0^2 + A_0^3 - A_0^4.$$

Wegen $$1 + 2A_0 + A_0^3 - A_0^4 = \frac{-1 - A_0 - A_0^3 + A_0^4}{A_0}$$

$$A_0 + A_0^2 + A_0^3 - A_0^4 = \frac{1}{-1 - A_0 - A_0^3 + A_0^4}$$

resultiert für Δ der Ausdruck:

$$\Delta = \frac{1}{2^4} \begin{vmatrix} lg\,|A_1|^2 & lg\,|A_2|^2 & lg\,|A_3|^2 & lg\,|A_1|^2 \\ lg\,|A_2|^2 & lg\,|A_3|^2 & lg\,|A_4|^2 & lg\,|A_0|^2 \\ lg\,|A_3|^2 & lg\,|A_4|^2 & lg\,|A_0|^2 & lg\,|A_1|^2 \\ lg\,|A_4|^2 & lg\,|A_0|^2 & lg\,|A_1|^2 & lg\,|A_2|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \frac{-5}{2^4}\,\Delta_1,$$

demzufolge sich in obiger Formel für $\frac{J_1}{J}$ wir erstreben natürlich nur einen absoluten Betrag der Bruch $\frac{16}{5}$ einfügen lässt, woraus sich die Grösse H als ganzzahliges Multiplum von 16 erkennen lässt

$$H = a.16.$$

Damit ist das eine Ziel erreicht; zum zweiten führt ein Satz von Minkowski,[1]) wonach in jeder Idealklasse ein Ideal $(\mathfrak{g})$ existiert, dessen Norm eine gewisse vom Grade n des Körpers und seiner Diskriminante d abhängende numerische Grösse nicht übersteigt. Der genaue Ausdruck lautet:

$$n(\mathfrak{g}) \leqq \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n} \frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}} \sqrt{d}\,, \qquad \text{VI}$$

worin $\Gamma(x)$ die bekannte Gammafunktion bedeutet. In unserem Körper, für den $n = 10$, $d = 47^5$, wird demnach in jeder Klasse ein Ideal zu finden sein, dessen Norm

$$n(\mathfrak{g}) \leqq \frac{5!}{\pi^5} \cdot \frac{2^{10}}{10^5} \cdot 47^2 \sqrt{47} < 61$$

ausfällt. Also dürfen wir uns, um eine obere Grenze für H zu gewinnen, darauf beschränken, nur die Primzahlen < 61 auf ihre Zerlegung zu untersuchen, und wie sich diese vollzieht, hat uns Kapitel III gezeigt.

Die Primzahlen

$$2,\ 3,\ 7,\ 17,\ 37,\ 53,\ 59$$

zerfallen in $k(\sqrt{-47})$; denn für sie wird das Legendresche Symbol $\left(\frac{-47}{p}\right) = 1$. Aber ihre Faktoren sind Ideale aus den Nebenklassen in k, fallen somit in K alle in die Hauptklasse. (Die kleinste Primzahl

[1]) Minkowsky: Journal für Mathem. B. 107, S. 278.

solcher Art, deren Faktoren in der Hauptklasse von k liegen, ist 191.) Von den übrigen bleiben

$$5,\ 11,\ 13,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 41,\ 43$$

auch in k Hauptideale, $\left(\frac{-47}{p}\right) = 1$, und müssen sich deshalb in K in je 5 Primideale zerlegen, wo sie sich möglicherweise auf 5.9 Klassen verteilen; nur die Primfaktoren von 47 gehören erwiesenermassen in K sicher alle der Hauptklasse an. Infolgedessen werden sich für die Faktoren der Primzahlen < 61 in K nicht mehr wie $5.9 + 1 = 46$ Klassen vorfinden.

Von den zusammengesetzten Zahlen können nur $5^2 = 25$ und $5.11 = 55$ Ideale in weitere verschiedene Klassen liefern und zwar 25 in 15, 55 in 25; denn das Produkt von je zwei der Primfaktoren von 5 oder von 5 und 11 hat die Norm 25 resp. 55.

Die maximale Zahl von Klassen, die es nach diesen Erörterungen in K geben kann, ist $46 + 40 = 86$. Wir schreiben

$$H \leqq 86,$$

aus welcher Ungleichung unter Beachtung von V eine obere Grenze für a folgt:

$$a \leqq \frac{86}{16} < 6. \qquad \text{VII}$$

So konnte mit Hilfe der Minkowskischen Annäherung erreicht werden, die Möglichkeit für a, eine Zahl grösser als Eins zu sein, ganz eng zu beschränken. Es sei nebenbei auf die Wichtigkeit von Formel VI gegenüber der bekannteren $n(\mathfrak{g}) \leqq \sqrt{d}$ hingewiesen, die zum Beweise des Satzes, dass es in jedem Körper nur eine endliche Anzahl von Klassen gibt, Verwendung findet. Eine solche Grenze $\sqrt{d} \leqq 15131$ würde verlangen, alle Zahlen bis 15131 auf ihre Zerlegung zu prüfen, welcher unlohnenden Arbeit man sich kaum unterziehen würde, auch abgesehen davon, dass hierdurch eine Zahl für H entstünde, die praktisch nicht mehr Grenze genannt werden dürfte.

Nach diesen Vorbereitungen wird es ein Leichtes sein, darzulegen, dass die Grössen $A_1 \ldots A_4$ ein System von Grundeinheiten bilden. Vorausgesetzt, sie würden das nicht tun, sondern erst die Grössen

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,$$

dann gestatten diese wieder eine Darstellung durch die A's:

$$E_1 = \left(A_1^{m_1} A_2^{m_2} A_3^{m_3} A_4^{m_4}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$E_2 = \left(A_1^{m_1'} A_2^{m_2'} A_3^{m_3'} A_4^{m_4'}\right)^{\frac{1}{M'}}$$

$$E_3 = \left(A_1^{m_3''} A_2^{m_2''} A_3^{m_3''} A_4^{m_4''}\right)^{\frac{1}{M''}}$$

$$E_4 = \left(A_1^{m_1'''} A_2^{m_2'''} A_3^{m_5'''} A_4^{m_4'''}\right)^{\frac{1}{M'''}}$$

in der die m wie die M ganze rationale Zahlen sind. Ebenso gestalten sich die zu ihnen Konjugierten, etwa solche zu E_1:

$$E_1' = \left(A_2^{m_1} A_3^{m_2} A_4^{m_3} A_0^{m_4}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$E_2'' = \left(A_3^{m_1} A_4^{m_2} A_0^{m_3} A_1^{m_4}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$E_3''' = \left(A_4^{m_1} A_0^{m_2} A_1^{m_3} A_2^{m_4}\right)^{\frac{1}{M}},$$

und der Regulator R wird sich also schreiben lassen:

$$R = \begin{vmatrix} lg|E_1| & lg|E_2| & lg|E_3| & lg|E_4| \\ lg|E_1'| & lg|E_2'| & lg|E_3'| & lg|E_4'| \\ lg|E_1''| & lg|E_2''| & lg|E_3''| & lg|E_4''| \\ lg|E_1'''| & lg|E_2'''| & lg|E_3'''| & lg|E_4'''| \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} lg|A_1| & lg|A_2| & lg|A_3| & lg|A_4| \\ lg|A_2| & lg|A_3| & lg|A_4| & lg|A_0| \\ lg|A_3| & lg|A_4| & lg|A_0| & lg|A_1| \\ lg|A_4| & lg|A_0| & lg|A_1| & lg|A_2| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_1' & m_2' & m_3' & m_4' \\ m_1'' & m_2'' & m_3'' & m_4'' \\ m_1''' & m_2''' & m_3''' & m_4''' \end{vmatrix} \frac{1}{M'M'M''M'''}.$$

Die Annahme, die in unserer Behauptung den A's zugesprochene Eigenschaft komme nicht ihnen selbst, wohl aber den E's zu, führt, wie man leicht aus dem letzten Determinantenprodukt erkennt, zur Konsequenz: Unter den M müssen solche vorkommen die grösser als 1 sind, und dies werden wir zeigen, ist nicht möglich. Wir erledigen sukzessive die Fälle in denen eines, zwei, drei oder alle vier der M grösser als Eins sind.

I. Fall: unter den E's befinde sich die Grösse

$$E_i = A_1^{\frac{m_1}{M}} A_2^{m_2} A_3^{m_3} A_4^{m_4}$$

wo m_1 prim zu M angenommen werde. Hieraus leitet sich die neue Einheit

$$H = \frac{A_1^{\frac{m_1}{M}} A_2^{m_2} A_3^{m_3} A_4^{m_4}}{A_2^{m_2} A_3^{m_3} A_4^{m_4}} = A_1^{\frac{m_1}{M}}$$

ab und da m_1, M teilerfremd, lassen sich zwei ganze rationale Zahlen a und b der Art bestimmen, dass $a \cdot m_1 + b\, M = 1$ wird. Aus H folgt somit die Existenz der Einheit

$$\overline{H} = A_1^{\frac{1}{M}}$$

und weil der Körper Galoissch, auch die von $A_2^{\frac{1}{M}}$, $A_3^{\frac{1}{M}}$, $A_4^{\frac{1}{M}}$. $A_1^{\frac{1}{M}}$, $A_2^{\frac{1}{M}}$, $A_3^{\frac{1}{M}}$, $A_4^{\frac{1}{M}}$ bilden wie die A's ein System unabhängiger Einheiten. Ihre log. Determinante hat den Wert

$$\Delta' = \Delta \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{M^4} = \frac{\Delta}{M^4}.$$

Da anderseits R den minimalen Wert der log. Determinanten aller Systeme unabhängiger Einheiten in K liefert, so folgt nach III, dass auch Δ' ein ganzzahliges Multiplum von R sein muss. Die obige Gleichung führt also unter Beiziehung von VII zur Ungleichheit

$$\Delta' = \frac{\Delta}{M^4} \leqq \frac{6}{M^4} \cdot R, \tag{1}$$

und der Bruch $\frac{6}{M^4}$, der eine ganze Zahl darstellen soll, lässt für M keine andere Möglichkeit als die Einheit selbst zu.

Eine Einheit $\sqrt[M]{A_i}$, $M > 1$, kommt in unserem Körper nicht vor.

Fall II: Eines der E's habe die Gestalt:

$$E_i = A_1^{m_1 M_1} A_2^{m_2 M_2} A_3^{m_3} A_4^{m_4},$$

worin wieder m_1 zu M_1, m_2 zu M_2 prim dürfen angenommen werden. M_1 wie M_2 seien grösser als 1 und ich behaupte $M_1 = M_2$; denn wäre etwa $M_1 < M_2$ so entstünde durch $E_i^{M_1}$ eine Einheit wie sie in Fall I betrachtet und als existenzlos in K gefunden wurde.

Mit E_i lässt sich wie oben eine Zahl $H = A_1^{m_1 M} A_2^{m_2 M}$ konstruieren, aus der dann die Existenz von $\bar{H} = A_1^{\frac{1}{M}} A_2^{\frac{m}{M}}$ folgt, und aus diesem neuen $\bar{H}$ leitet sich in K ein System

$$\bar{H}_2 = A_2^{\frac{1}{M}} A_3^{\frac{m}{M}}$$

$$\bar{H}_3 = A_3^{\frac{1}{M}} A_4^{\frac{m}{M}}$$

$$\bar{H}_4 = A_1^{\frac{-m}{M} \cdot q} A_2^{\frac{-mq}{M}} A_3^{\frac{-mq}{M}} A_4^{\frac{(1-m)q + \mathrm{x}M}{M}}$$

ab, das gemeinsam mit $\bar{H}_1$ bei richtiger Wahl von q und x zu einem solchen von unabhängigen Einheiten wird; denn die log. Determinante lautet alsdann

$$\Delta' = \frac{\Delta}{M^4} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ -mq & -mq & -mq & (1-m)q + \mathrm{x}M \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Delta}{M^4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ mq & (m+m^2)q & (m+m^2\ m^3)q & (1\ m+m^2\ m^3+m^4)q+\mathrm{x}M \end{vmatrix}$$

und im letzten Gliede dieser Determinante können q und x stets so gewählt werden, dass sein Wert innert die Grenzen

$$0 < (1 - m + m^2 - m^3 + m^4)\, q + \varkappa M \leqq M$$

zu liegen kommt, Δ' also der Ungleichung

$$\Delta' \leqq \Delta \frac{1}{M^3}$$

genügt, ohne selbst gleich Null zu werden. Für M folgt daraus ähnlich wie in 1) eine höchst mögliche Zahl

$$M^3 < 6$$
$$M < 2$$

Damit ist bewiesen, dass eine Einheit von der Art $E = A_1^{\frac{m_1}{M_1}} A_2^{\frac{m_2}{M_2}} A_3^{m_3} A_4^{m_4}$ in K keine Existenzberechtigung besitzt, falls nicht M_1 wie M_2 der Eins gleich sind.

III. Fall: $$E_i = A_1^{\frac{m_1}{M_1}} A_2^{\frac{m_2}{M_2}} A_3^{\frac{m_3}{M_3}} A_4^{m_4}.$$

Bei der Untersuchung eine dergestalteten E's dürfen wir uns entsprechend dem vorhergehenden Falle darauf beschränken, $M_1 = M_2 = M_3$ zu setzen, selbst bei unverkürzbaren Brüchen $\frac{m}{M}$; denn andere Grössenbeziehungen zwischen den M sind durch die Fälle I und II bereits erledigt. So würde $M_3 < M_2$, $M_3 < M_1$ auf Fall II, $M_3 = M_2 < M_4$ auf Fall I führen, wenn E mit M_3 potenziert wird. Diese beiden Annahmen umfassen aber dank der ausgezeichneten Eigenschaft unseres Körpers, alle zueinander konjugierten Zahlen in sich zu vereinigen, schon alle Möglichkeiten, ausgenommen $M_1 = M_2 = M_3$.

Ähnlich wie oben folgt aus E_i die Existenz einer Einheit

$$H_1 = A_1^{\frac{1}{M}} A_2^{\frac{m_1}{M}} A_3^{\frac{m_2}{M}}$$

und hieraus wieder die von

$$H_2 = A_2^{\frac{1}{M}} A_3^{\frac{m_1}{M}} A_4^{\frac{m_2}{M}}$$

$$H_3 = A_1^{\frac{m_2}{M} p} A_2^{\frac{m_2}{M} p} A_3^{(1 \frac{m_2}{M}) p + x_1} A_4^{(\frac{m_1}{M} \frac{m_2}{M}) p + x_2}$$

$$H_4 = A_1^{\frac{m_2}{M}\,\frac{m_1}{M}}\, A_2^{\frac{-m_1}{M}}\, A_4^{\frac{m_1}{M}}\, A_3^{\frac{(1-m_1)}{M}} + y$$

Bei geeigneter Wahl von p, x_1, x_2, y bilden auch diese $H_1 \ldots . H_4$ ein System unabhängiger Einheiten. In ihrer log. Determinante

$$\Delta' = \frac{\Delta}{M^4} \begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_2 & 0 \\ 0 & 1 & m_1 & m_2 \\ -m_2 p & -m_2 p & (1-m_2)p + x_1 M, & (m_1-m_2)\,p + x_2 M \\ m_2-m_1 & -m_1 & -m_1 & (1-m_1) + y\,M \end{vmatrix}$$

können den Unbestimmten sogar solche ganzzahligen Werte beigelegt werden, die gestatten, letzteren Determinantenfaktor auf die übersichtlichere Form

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \quad \text{wo} \quad \begin{matrix} 0 < a_3 \leqq M \\ 0 < b_4 \leqq M \end{matrix}$$

zu bringen, aus welcher offenkundig die Grenze

$$\Delta' \leqq \frac{\Delta}{M^2}$$

also

$$M^2 < 6 \qquad M < 3$$

zu entnehmen ist.

M könnte also 2 sein. Dann würde aber aus E_i eine Einheit

$$H = A_1^{1\,2}\, A_2^{1\,2}\, A_3^{1\,2} = A_4^{1\,2}\, A_0^{1\,2}$$

fliessen, die sofort die andere $H = A_0^{1\,2}\, A_4^{1\,2}$ und diese wieder $A_1^{1\,2}\, A_2^{1\,2}$ nach sich ziehen würde, welch letztere, wie wir gesehen, in K die Möglichkeit zu existieren, nicht besitzt. Hier wie in der vorhergehenden Beweisführung war die zyklische Folge unwesentlicher Bestandteil:

Der Beweis von Satz I für System I ist somit in allen Teilen erbracht. A_1, A_2, A_3, A_4 bilden wirklich ein System von Grundeinheiten und ihre log. Determinante II stellt den Regulator von K dar. Darnach hat die zu bestimmende Zahl a in V den Wert 1 und H wird gleich 16. Wir gelangten auf diesem Wege zum bedeutsamsten Resultate des ganzen Abschnittes:

Satz II: Die Ideale des Körpers $K(A_6, \sqrt{-47})$ verteilen sich auf sechzehn verschiedene Klassen.

Es scheint mir von einigem Interesse, hier der Kongruenz 5) im Fall IV im besondern Erwähnung zu tun.

Auf den Ausdruck:

$$1 - m + m^2 - m^3 + m^4 \tag{4}$$

stiessen wir bereits in Fall II beim letzten Gliede des Det. Produktes für Δ'. Auch Fall III hätte ihn geliefert, wären hier ähnliche Betrachtungen angestellt worden wie sub IV. Wir haben es der Einfachheit halber vermieden. Die vorige Untersuchung gipfelt demnach in der Diskussion der ganzzahligen Werte von (4), welche als Kongruenz nach M neben 3), 4) die einzigen unabhängigen Beziehungen zwischen $m_1\, m_2\, m_3$ darstellt. Man wird also besser so vorgehen, dass man durch 5) M bestimmt. Ein solches Verfahren leitet, soweit ich die Rechnungen durchgeführt habe, neben 5 nur zu Primzahlen, deren letzte Ziffer Eins ist: 11, 31, 41, 61, 71, 101, etc. und für sie alle fanden sich immer nur 4 Werte für $m_3 < M$, die jeweilen zu ebensovielen verschiedenen Systemen von unabhängigen Einheiten führten.

Als Abschluss obiger Erörterungen wäre der Nachweis eines Teiles von Satz I nachzutragen, welcher besagt, dass auch

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1' &= -1 - A_1 - A_1^3 + A_1^4 \\
\varepsilon_2' &= -1 - A_2 - A_2^3 + A_2^4 \\
\varepsilon_3' &= -1 - A_3 - A_3^3 + A_3^4 \\
\varepsilon_4' &= -1 - A_4 - A_4^3 + A_4^4
\end{aligned}$$

als Grundeinheiten zusammen gehören.

Gelingt es die log. Determinante der ε' in die der ε durch lineare Substitution überzuführen, ist auch diese Wahrheit klargestellt.

Ähnliche Überlegungen wie sie auf Seite 62 zu Δ_1 geführt haben, verhelfen auch hier zu den absoluten Werten

$$\varepsilon'_1{}^2 = A_0$$

$$\varepsilon'_2{}^2 = 1 + A_0 + A_0{}^2 - A_0{}^3 = \frac{1}{(-1-A_0-A_0{}^3+A_0{}^4)\,A_0}$$

$$\varepsilon'_3{}^2 = 1 + A_0 + A_0{}^2 - A_0{}^3 = \frac{1}{(-1-A_0-A_0{}^3+A_0{}^4)\,A_0}$$

$$\varepsilon'_4{}^2 = A_0$$

$$\varepsilon'_0{}^2 = (-1-A_0-A_0{}^3+A_0{}^4)^2,$$

die ihrerseits der log. Determinante

$$\Delta' = \frac{1}{2^4}\begin{vmatrix} lg\ \varepsilon_1{}^2 & lg\ \varepsilon_2{}^2 & lg\ \varepsilon_3{}^2 & lg\ \varepsilon_4{}^2 \\ lg\ \varepsilon_2{}^2 & lg\ \varepsilon_3{}^2 & lg\ \varepsilon_4{}^2 & lg\ \varepsilon_0{}^2 \\ lg\ \varepsilon_3{}^2 & lg\ \varepsilon_4{}^2 & lg\ \varepsilon_0{}^2 & lg\ \varepsilon_1{}^2 \\ lg\ \varepsilon_4{}^2 & lg\ \varepsilon_0{}^2 & lg\ \varepsilon_1{}^2 & lg\ \varepsilon_2{}^2 \end{vmatrix}$$

eine Form verleihen, die nach früher (Seite 62) angegebenen Werten sich leicht auf

$$A' = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} lg\ A_1{}^2 & lg\ A_2{}^2 & lg\ A_3{}^2 & lg\ A_4{}^2 \\ lg\ A_2{}^2 & lg\ A_3{}^2 & lg\ A_4{}^2 & lg\ A_0{}^2 \\ lg\ A_3{}^2 & lg\ A_4{}^2 & lg\ A_0{}^2 & lg\ A_1{}^2 \\ lg\ A_4{}^2 & lg\ A_0{}^2 & lg\ A_1{}^2 & lg\ A_2{}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

reduzieren lässt. Die ersten beiden Faktoren rechter Hand bilden genau den Ausdruck Δ auf Seite 62, der dritte ist eine Einheitsdeterminante.

Ebenso wie A_1, A_2, A_3, A_4 erfüllt jede andere Kombination der A's: A_0, A_1, A_2, A_3; A_0, A_1, A_2, A_4; A_0, A_1, A_3, A_4; A_0, A_2, A_3, A_4 die Eigenschaft, Grundeinheiten in K zu sein, indem sie alle zur selben absoluten Determinante Δ führen. Das Entsprechende gilt natürlich auch von den ε'. Satz I dürfte sich auch so fassen lassen:

Vier beliebige der Wurzeln unserer Hauptgleichung bilden ein System von Grundeinheiten im Körper K.

[1]) Zahlbericht l. c. S. 214.

§ 11.

Die engen Beziehungen zwischen u_0 und u_1 bezw. zwischen A_0 und $-1-A_0-A_0^3+A_0^4$ lassen erwarten, diese mögen in $k(A_0)$, welchem Körper sie ja beide angehören, ähnliche Funktionen erfüllen.

Satz III: Die Zahlen A_i, $-1-A_i-A_i^3+A_i^4$ bilden im Körper $k(A_i)$ ein System von Grundeinheiten.

Beweis: Von den Körpern $k(A_i)$ sind 2 Paare konjugiert imaginär und einer reell. Also wird es nach Dedekind[1]) in $k(A_i)$ nur $2+1-1=2$ Grundeinheiten geben können. Wir bestimmen sie für $k(A_0)$, und die konjugierten Zahlen geben diejenigen der bezüglichen Körper; denn vom Gesichtspunkte der Körpertheorie ist es gleichgültig, welchen wir auswählen, sie zeigen alle gleiche Struktur.

Die log. Determinante von u_0 und u_1 lautet ausgewertet

$$\Delta = \begin{vmatrix} lg\ A_0, & lg\,(-1 & A_0 & A_0^3+A_0^4) \\ lg\ A_1, & lg & 1 & A_1 & A_1^3+A_1^4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} lg\,A_0, & lg(& 1 & A_0-A_0^3+A_0^4) \\ lg\,A_1{}^2, & lg & 1- & A_1 & A_1^3+A_1^{4\,2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} lg\ A_0 & & lg\,(-1-A_0-A_0^3+A_0^4) \\ lg & -1-A_0-A_0^3+A_0^4 & lg\ A_0 \\ & A_0 & \end{vmatrix} = 0{,}17347 + \varepsilon^{1}),$$

woraus hervorgeht, dass u_0 und u_1 unabhängige Einheiten sind. Eine solche Erkenntnis genügt vollauf, um die Richtigkeit obigen Satzes einzusehen; denn ε_0 wie ε_0' gehören beide schon in K Systemen von Grundeinheiten an, und um so eher werden sie das in $k(A_0)$ tun. Da sie zudem in keiner Abhängigkeit zu einander stehen, sind sie zusammen als System von Grundeinheiten charakterisiert.

§ 12.

Anhangsweise seien noch weitere Resultate zur Bestimmung der Klassenanzahl beigefügt. Sie mögen eine neue Bestätigung dessen bilden was Satz I, II, III über Klassenanzahl und Einheiten ausdrücken.

Wie bereits bemerkt, eignet sich Formel II, § 7, mehr zu theoretischer Ueberlegung wie zu praktischer Berechnung. Ihr liegt ein

[1]) Es zeigt sich hier, dass der aproximative Wert von Δ sich mit dem von $\frac{A_0}{10}$ deckt. Ob sich ein Zusammenhang $\Delta = \frac{A_0}{10}$ bewahrheitet, habe ich nicht untersucht.

Primideal und dessen Potenzen als Repräsentantensystem zu Grunde. Zwar wird für unsern Körper die Ermittelung des algebr. Ausdruckes für die u, hier mit ε bezeichnet, noch verhältnismässig einfach, wenngleich doch komplizierter wie in den §§ 7—9 behandelten Falle, indem das Primideal $\left(2, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}\right)$, dessen Norm gleich 2, nur zu einer Zweiteilung des Argumentes ω der η-Funktion Anlass gibt.

Die Kongruenz (S. 41)

$$B^2 \equiv -47 \ (2^5)$$

wird befriedigt für $B = 9$ und die ebendaselbst angegebenen Funktionen ε gestalten sich demnach (wegen $d = -47$, $p = 2$, $l = 5$), wie folgt

$$\varepsilon_\mu = \frac{\eta\left(\frac{9+\sqrt{-47}}{2^{\mu+2}}\right)\eta\left(\frac{-9+\sqrt{-47}}{2^{\mu+2}}\right)}{\eta\left(\frac{9+\sqrt{-47}}{2^{\mu+1}}\right)\eta\left(\frac{-9+\sqrt{-47}}{2^{\mu+1}}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon_5 = \frac{\eta\left(\frac{9+\sqrt{-47}}{2^2}\right)\eta\left(\frac{-9+\sqrt{-47}}{2^2}\right)}{\eta\left(\frac{9+\sqrt{-47}}{2^6}\right)\eta\left(\frac{-9+\sqrt{-47}}{2^6}\right)}\,2^2.$$

Führt man in ε_μ wieder die Funktion

$$f_1(\omega) = \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)}$$

ein, so lautet dieses

$$\varepsilon_\mu = f_1\left(\frac{9+\sqrt{-47}}{2^{\mu-1}}\right) f_1\left(\frac{-9+\sqrt{-47}}{2^{\mu-1}}\right)\sqrt{2}$$

und wie die Halbierung des Argumentes der f-Funktionen vor sich geht, haben wir in § 8 gesehen.

Ich begnüge mich damit, die so gefundenen Resultate folgen zu lassen:

$$\varepsilon_1 = -1 - A_0 \quad A_0^3 + A_0^4$$

$$\varepsilon_2 = 1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{-1 - A_0 - A_0^3 + A_0^4}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{A_0}$$

$$\varepsilon_5 = A_0.$$

— Die verschiedene Wahl des Repräsentantensystems — denn darin allein liegt der prinzipielle Unterschied zwischen Formel I und II § 7 — führte also auf keine neuen Grössen, da

$$u_0 = \varepsilon_5 \qquad u_1 = \varepsilon_1 \qquad u_2 = \varepsilon_2 \qquad u_3 = \varepsilon_3 \qquad u_4 = \varepsilon_4$$

welche Anordnung sogar zyklisch mit der der u's übereinstimmt. Der Wert der aus den ε's sich ergebenden log. Determinante Δ in II wird also nur im Zeichen von Δ, § 7 IV abweichen können.

Zum Schlusse erfülle ich die angenehme Pflicht, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. *R. Fueter*, den herzlichsten Dank auszusprechen. Er hat mir die Anregung zur vorliegenden Arbeit gegeben und ihrem Entstehen stets lebhaftes Interesse entgegengebracht.

Curriculum vitae.

Ich, *Hugo Heinis*, von Therwil (Baselland), Sohn des Fridolin Heinis, Landwirt in Therwil und der Marie geb. Gschwind, wurde am 9. Oktober 1883 in Therwil geboren. Nach Absolvierung der dortigen Primar- und Bezirksschule besuchte ich die Gymnasien Sarnen und Schwyz und bestand im Herbst 1905 die Maturitätsprüfung, um mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften zu widmen. Hierzu bezog ich im Oktober gleichen Jahres die Universität Basel bis Herbst 1907, von da bis 1908 die Universität Freiburg (Schweiz), um dann wieder nach Basel zurückzukehren, wo ich mir im Sommer 1909 das Diplom für Mittellehrer in Mathematik, Physik und Geographie erwarb. In der Folge betrieb ich spezielle mathematische Studien, war aber wegen Erkrankung längere Zeit an intensiver Arbeit verhindert.

Im Verlaufe meiner Studienzeit hörte ich die Vorlesungen und nahm teil an den Übungen und Praktika der Herren Professoren Fr. Fichter, A. Fischer, R. Flatt, R. Fueter, M. Grossmann, E. Hagenbach-Bischoff †, A. Hagenbach, H. Kinkelin, A. Riggenbach, H. Rupe, G. Senn, O. Spiess, H. Veillon, K. Von der Mühll.

H. Baumhauer, A. Daniëls, A. Gockel, J. von Kowalski.

Allen diesen Herren spreche ich meinen warm empfundenen Dank aus.